

BÀI 1 +2. HÌNH HỘP CHỮ NHẬT

I.Lí Thuyết

1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian

Cho hai đường thẳng a và b trong không gian.

Ta nói a và b song song nếu chúng cùng thuộc một mặt phẳng và không có điểm chung.

Ta nói a và b cắt nhau nếu chúng cùng thuộc một mặt phẳng và có chỉ một điểm chung.

Ta nói a và b trùng nhau nếu chúng có ít nhất hai điểm chung phân biệt.

Ta nói a và b chéo nhau nếu không tồn tại bất cứ một mặt phẳng nào chứa cả a và b .

2. Đường thẳng và mặt phẳng song song

Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) . Ta nói a song song với (P) nếu a không có điểm chung với mặt phẳng (P) .

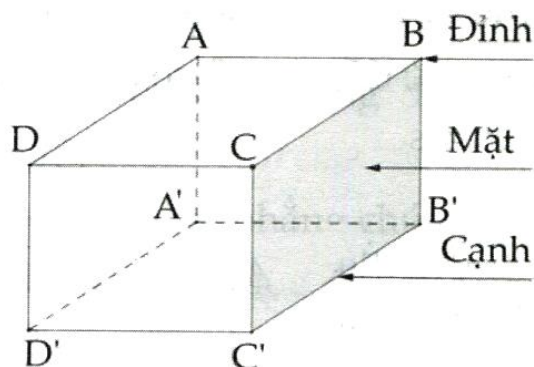
3. Hai mặt phẳng song song

Ta nói hai mặt phẳng song song với nhau nếu trong mặt phẳng này có hai đường thẳng cắt nhau và cùng song song với mặt phẳng kia.

Lưu ý. Hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung I thì chúng có một đường thẳng chung a (a đi qua I). Khi đó ta nói hai mặt phẳng đã cho cắt nhau theo giao tuyến a .

4. Hình hộp chữ nhật

Hình hộp chữ nhật là hình có 6 mặt đều là các hình chữ nhật.



Hình hộp chữ nhật có 8 đỉnh: $A; B; C, D, A', B', C', D'$

Hình hộp chữ nhật có 6 mặt: $ABCD; BCCB'; \dots$

Hình hộp chữ nhật có 12 cạnh: $AD; D'C'; CD; \dots$

Hai mặt không có cạnh chung gọi là hai mặt đối diện. Nếu coi hai mặt đối diện là mặt đáy thì các mặt còn lại gọi là mặt bên.

Hình hộp chữ nhật có tất cả các mặt là hình vuông thì gọi là hình lập phương.

5. Các công thức tính diện tích

Xét hình hộp chữ nhật có chiều cao h , đáy có chiều dài là a , và chiều rộng là b .

a) Diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật bằng chu vi đáy nhân chiều cao:

$$S_{xq} = 2(a + b)h.$$

b) Diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật bằng diện tích xung quanh cộng diện tích hai đáy:

$$S_{tp} = 2(a + b)h + 2ab.$$

II. Các dạng bài tập

Dạng 1. Nhận biết vị trí tương đối của hai đường thẳng, của đường thẳng với mặt phẳng và của hai mặt phẳng của hình hộp chữ nhật

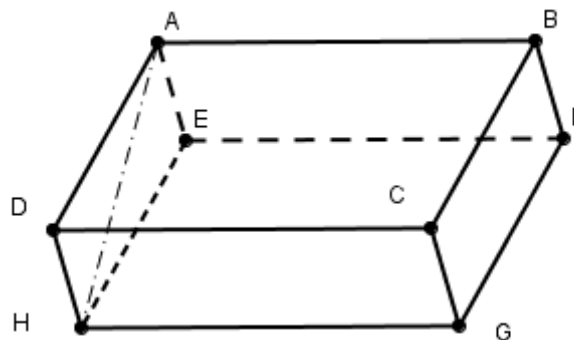
Phương pháp giải: Dùng các kiến thức nêu trong phần Tóm tắt lý thuyết để nhận biết.

Bài 1: Cho hình lập phương ABCD.EFGH

a) Hãy kể tên các cạnh song song với mặt phẳng (EFGH)

b) Kể tên các mặt phẳng song song với nhau

Hướng Dẫn:



a) $BC \parallel FG$ mà FG nằm trong mặt phẳng (EFGH)

Vậy $BC \parallel mp$ (EFGH)

$CD \parallel GH$ mà GH nằm trong mặt phẳng (EFGH).

Vậy $GH \parallel mp$ (EFGH)

$DA \parallel HE$ mà HE nằm trong mặt phẳng (EFGH).

Vậy $DA \parallel mp$ (EFGH)

b) $mp(BCGF) \parallel mp(ADHE)$ vì BF, BC cắt nhau nằm trong $mp(BCGF)$; AE, AD cắt nhau nằm trong $mp(ADHE)$ và $BF \parallel AE, BC \parallel AD$

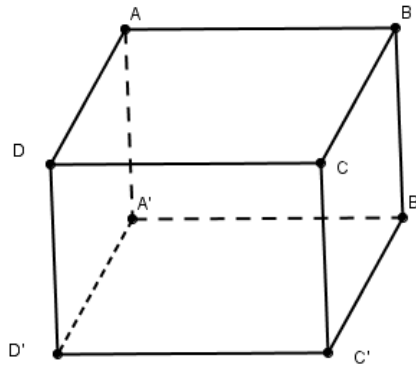
$mp(ABCD) // mp(EFGH)$ vì AB, BC cắt nhau nằm trong $mp(ABCD)$; EF, FG cắt nhau nằm trong $mp(EFGH)$ và $AB//EF, BC//FG$

$mp(ABFE) // mp(DCGH)$ vì AB, AE cắt nhau nằm trong $mp(EBFE)$; DC, DH cắt nhau nằm trong $mp(DCGH)$ và $AB//DC, AE//DH$.

Bài 2: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

- a) Những cạnh nào song song với DD' ?
- b) Những cạnh nào song song với BC ?
- c) Những cạnh nào song song với CD ?
- d) Những mặt nào song song với $mp(BCC'B')$?

Hướng Dẫn:



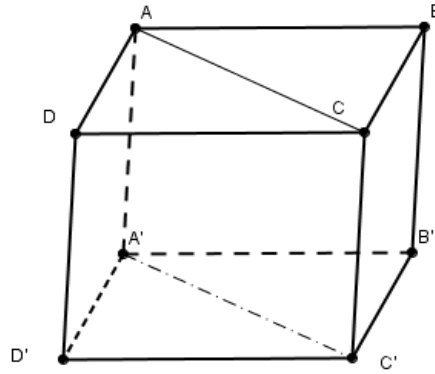
- a) Các cạnh song song với DD' là AA' ; BB' ; CC' .
- b) Các cạnh song song với BC là $B'C'$; AD ; $A'D'$.
- c) Các cạnh song song với CD là AB ; $C'D'$; $A'B'$.
- d) $mp(BCC'B') // mp(ADD'A')$

vì $mp(BCC'B')$ chứa hai đường thẳng BC và BB' cắt nhau, mà $BC//AD$ và $BB'//AA'$

Bài 3: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

- a) Đường thẳng $A'B'$ song song với những mặt phẳng nào?
- b) Đường thẳng AC có song song với mặt phẳng $(A'B'C')$ không?

Hướng Dẫn:



a) $A'B' // mp(ABCD)$ vì $A'B' // AB$ và $AB \subset mp(ABCD)$

$A'B' // mp(DCC'D')$ vì $A'B' // D'C'$ và $D'C' \subset mp(DCC'D')$

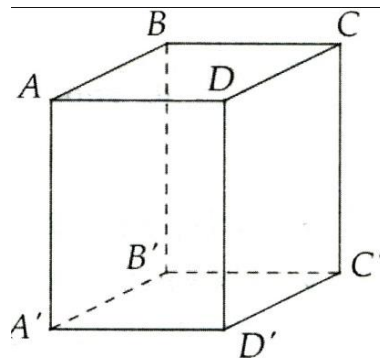
b) $AC // mp(A'B'C')$ vì $AC // A'C'$ và $A'C' \subset mp(A'B'C')$

Bài 4: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' như hình vẽ.

a) Cặp đường thẳng BB' và $A'D'$; CD và $B'C'$ có cắt nhau không?

b) Đường thẳng AB có song song với $C'D'$ không? Vì sao?

c) Nêu vị trí tương đối của $(ABB'A')$ với $(BDD'B')$ và $(CDD'C')$? Giải thích ?



Hướng Dẫn:

a) BB' và $A'D'$ chéo nhau, CD và $B'C'$ chéo nhau.

b) AB song song với CD (hoặc $A'B'$)

c) $(ABB'A')$ cắt $(BDD'B')$ theo giao tuyến BB' , $(ABB'A') // (CDD'C')$ vì AB và AA' song song với $(CDD'C')$.

Bài 5: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' như hình vẽ trên.

a) Nêu vị trí tương đối của các cặp đường thẳng AB' và $C'D$; $B'D'$ và AD ; AC và $A'C$.

b) BC' song song với $(ADD'A')$ không? Vì sao? $C/m (BCC'B')$ song song với $(ADD'A')$.

c) AC' và CA' có cắt nhau không? Vì sao?

d) Hai mặt phẳng $(ACC'A')$ và $(BDD'B')$ có cắt nhau không? Nếu cắt thì cắt theo đường thẳng chung nào?

Hướng Dẫn:

a) AB' và $C'D$ song song, $B'D'$ và AD chéo nhau, AC và $A'C'$ song song.

b) BC' song song với $(ADD'A')$.

c) AC' và CA' cắt nhau tại C .

d) $(ACC'A')$ và $(BDD'B')$ cắt nhau theo giao tuyến OO' (O và O' lần lượt là giao của AC , BD và $A'C'$, $B'D'$)

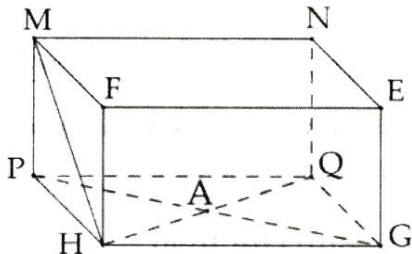
Dạng 2. Nhận biết các đỉnh, các cạnh và các mặt của hình hộp chữ nhật

Phương pháp giải: Dùng kiến thức nêu trong phần Tóm tắt lý thuyết để nhận biết.

Bài 1: Cho hình hộp chữ nhật $MNEF.PQGH$ như hình vẽ.

a) Kể tên 5 đỉnh và 4 mặt của hình hộp chữ nhật.

b) Kể tên tất cả các cạnh của hình hộp chữ nhật.



Hướng Dẫn:

a) Tên 5 đỉnh: M, N, F, E, P

Tên 4 mặt: $MNEF, MNQP, PQGH, NEGQ$.

Lưu ý: HS có thể liệt kê tên các đỉnh, các mặt khác.

b) Tên các cạnh: $MN, NE, EF, FM, PQ, QG, GH, HP, MP, FH, NQ, EG$.

Bài 2: Cho hình hộp chữ nhật $MNEF.PQGH$ như hình vẽ trên.

a) Kể tên tất cả các mặt đối diện của hình hộp chữ nhật.

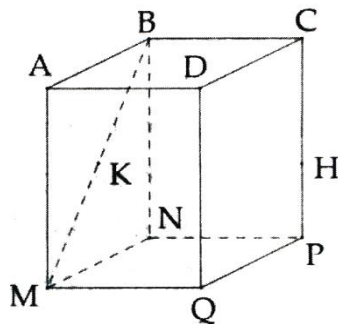
b) Nếu coi $MPHF$ và $NQGE$ là hai mặt đáy, hãy kể tên tất cả các mặt bên của hình hộp chữ nhật.

Hướng Dẫn:

- a) MNEF và PQGH; MFHP và NEGQ; MNQP và FEGH.
- b) MNEF, PQGH, MNQP và FEGH.

Bài 3: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.MNPQ như hình vẽ. K là trung điểm BM, H thuộc PC.

- a) Kể tên các mặt phẳng chứa cạnh QD.
- b) Điểm K có thuộc (ABNM) không? Vì sao?
- c) BM có cắt được KN không?



Hướng Dẫn:

- a) (AMQD) và (DQPC)
- b) $K \in BM$ và $BM \subset (ABNM)$ nên $K \in (ABNM)$.
- c) BM và KN cắt nhau tại K.

Bài 4: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.MNPQ như hình vẽ. K là trung điểm BM, H thuộc PC.

- a) AN có đi qua K không? Vì sao?
- b) Kể tên các mặt phẳng chứa điểm H.
- c) Hai đường thẳng DH và PQ có cắt nhau không? Vì sao?

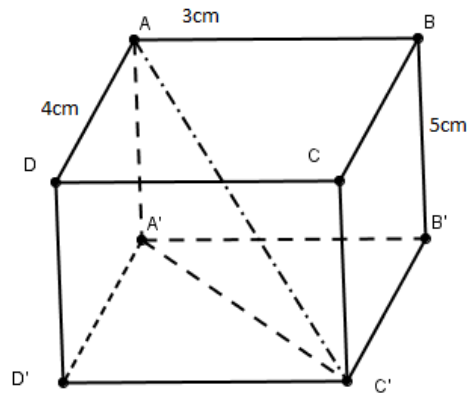
Hướng Dẫn:

- a) AN có đi qua K
- b) (BNPC) và (CPQD)
- c) Đường DH có cắt được đường PQ.

Dạng 3. Tính độ dài các đoạn thẳng

Phương pháp giải: Đưa các dữ liệu của cạnh, góc về trong cùng một mặt phẳng, sử dụng các công thức hình phẳng để tính.

Bài 1. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có $AB = 3\text{cm}$, $AD = 4\text{cm}$; $AA' = 5\text{cm}$. Tính AC'



Hướng Dẫn:

Ta có $AB = A'B' = 3\text{cm}$; $AA' = BB' = 5\text{cm}$

$AD = B'C' = 4\text{cm}$

Áp dụng định lí py - ta - go vào tam giác vuông $A'B'C'$ ta có

$$A'C' = \sqrt{A'B'^2 + B'C'^2} = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

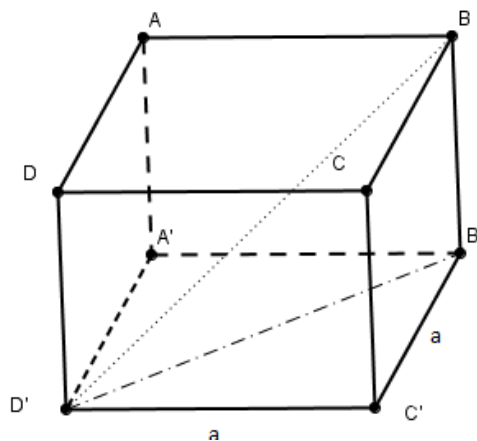
$$A'C' = 5\text{cm}$$

Áp dụng định lí py - ta - go vào tam giác vuông $AA'C'$ ta có

$$AC' = \sqrt{AA'^2 + A'C'^2} = \sqrt{5^2 + 5^2}$$

$$AC' = 5\sqrt{2}\text{cm}$$

Bài 2: Tìm độ dài cạnh của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ biết $BD' = \sqrt{3}\text{ cm}$



Hướng Dẫn:

Gọi độ dài cạnh hình lập phương là $a\text{ cm}$

Ta có $B'D' = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}\text{ cm}$

Ta có

$$BD' = \sqrt{B'D'^2 + BB'^2} = \sqrt{2a^2 + a^2}$$

$$BD' = a\sqrt{3} \text{ cm}$$

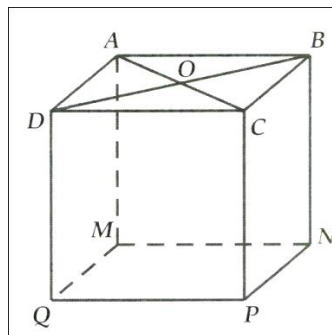
Mà $BD' = \sqrt{3}$ cm nên ta có $a = 1$ cm

Vậy cạnh hình lập phương là 1cm

Bài 3: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.MNPQ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi o là giao điểm của AC và BD.

a) Tứ giác ABNM là hình gì? Vì sao?

b) Cho $S_{CDQP} = 100 \text{ cm}^2$. Tính OB.



Hướng Dẫn:

a) Tứ giác ABNM là hình chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau, nên ABNM là hình vuông.

b) Vì CDQP là hình vuông nên cạnh $CD = 10 \text{ cm}$.

Từ đó tìm được $OB = 5\sqrt{2} \text{ cm}$.

Bài 4: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.MNPQ có $BC = 4 \text{ cm}$, $BP = 5 \text{ cm}$.

a) Kể tên tất cả các cạnh bằng CD? Giải thích.

b) Tính BN.

Hướng Dẫn:

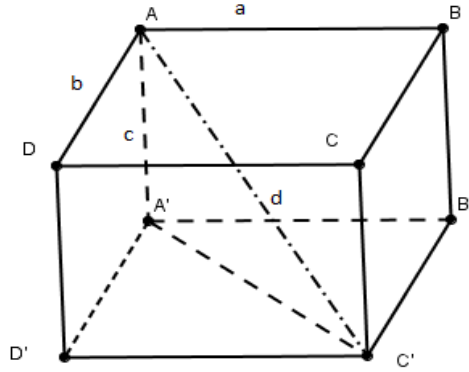
a) AB, MN và PQ

b) $BN = 3 \text{ cm}$.

Bài 5: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$. Chứng minh

$$D'B = B'D = AC' = A'C = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Hướng Dẫn:



Trong tam giác vuông $A'B'C'$ ta có $A'C' = \sqrt{B'C'^2 + B'A'^2} \Rightarrow A'C' = \sqrt{b^2 + a^2}$

Trong tam giác vuông $AA'C'$ ta có

$$AC' = \sqrt{AA'^2 + A'C'^2} \Rightarrow AC' = \sqrt{c^2 + b^2 + a^2}$$

Tương tự ta có $D'B = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$$B'D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$A'C = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

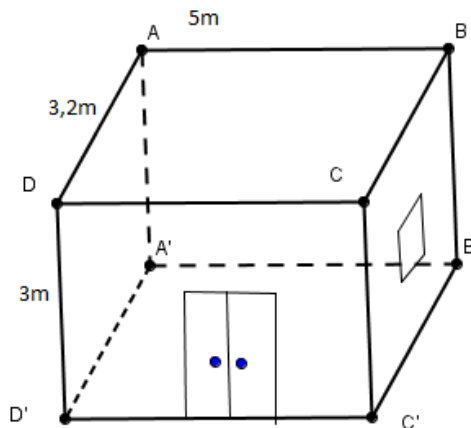
Vậy $D'B = B'D = AC' = A'C = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Dạng 4. Tính toán các số liệu liên quan đến cạnh, mặt của hình hộp chữ nhật

Phương pháp giải: Đưa các dữ liệu của cạnh, góc về trong cùng một mặt phẳng và sử dụng các công thức đã biết trong hình học phẳng để tính.

Bài 1. Một căn phòng dài 5m, rộng 3,2m và cao 3m. Người ta muốn quét vôi trần nhà và bốn bức tường. Biết rằng tổng diện tích các cửa là $6,3m^2$. Hãy tính diện tích cần quét vôi?

Hướng Dẫn:



Diện tích trần nhà

$$S_1 = 5.3,2 = 16m^2$$

Diện tích một mặt các bức tường của căn phòng

$$S_2 = (3.5).2 + (3.3, 2).2 = 49.2m^2$$

Diện tích cần quét vôi căn phòng (đã trừ diện tích các cửa) là

$$S = S_1 + S_2 - 6,3 = 16 + 49,2 - 6,3$$

$$S = 68.8m^2$$

Bài 2: Cho một căn phòng có dạng hình hộp chữ nhật. Biết chiều dài, chiều rộng căn phòng lần lượt là 3m và 2m và mặt bên chứa cạnh 3m có đường chéo dài 5m.

- a) Tính diện tích mặt sàn căn phòng.
- b) Tính diện tích xung quanh căn phòng.

Hướng Dẫn:

- a) Diện tích mặt sàn là $3.2 = 6m^2$
 - b) Chiều cao căn phòng là 4m.
- Từ đó tìm được diện tích xung quanh của căn phòng là $40m^2$

Bài 3: Cho một căn phòng có dạng hình hộp chữ nhật. Chiều dài và chiều rộng căn phòng lần lượt là 4m và 3m. Mặt bên chứa cạnh 3m có đường chéo dài 5m.

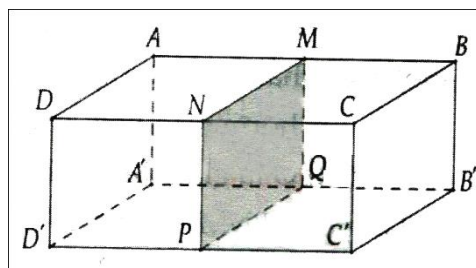
- a) Để lát gạch nền căn phòng cần ít nhất bao nhiêu viên gạch hoa hình vuông, biết một viên gạch có số đo 20cm.
- b) Tính diện tích toàn phần của căn phòng.

Hướng Dẫn:

- a) 300 viên gạch
- b) $80m^2$

III. Bài tập tự luyện

Bài 1: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' như hình vẽ. Cắt hình hộp theo mặt cắt MNPQ với M là trung điểm của AB và (MNPQ) song song (AA'D'D).



- a) Chứng minh $NQ // (BCC'B')$
- b) Nêu vị trí tương đối của các cặp đường thẳng AN và BD; PB' và MN.

- c) Cho $AA' = 50\text{cm}$ và $ND' = DM = 50\sqrt{2}\text{cm}$. Khi đó $AMND.A'QPD'$ là hình gì?
d) Tính diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

Hướng Dẫn:

- a) $NQ//DA'// (BCC'B')$
b) AN và BD cắt nhau, PB' và MN chéo nhau.
c) $AMND.A'QPD'$ là hình lập phương
d) Diện tích xung quanh của hình hộp là 15000cm^2

Bài 2: Một phòng học hình hộp chữ nhật có chiều dài 10m, chiều rộng 5 m và chiều cao 4 ra. Người ta định sơn bốn bức tường căn phòng, biết giá công tiền sơn là 25.000 đồng cho mỗi ra^2 . Hỏi chi phí tiền công là bao nhiêu? Cho biết căn phòng có một cửa chính cao 1,8 m và rộng 2 m và hai cửa sổ có cùng chiều dài 80 cm, chiều rộng 60 cm.

Hướng Dẫn:

Diện tích cần sơn là $115,44\text{m}^2$. Từ đó tính được chi phí tiền công là 2.886.000đồng.

BÀI 3. THỂ TÍCH CỦA HÌNH HỘP CHỮ NHẬT

I. Lí Thuyết

1. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Đường thẳng a gọi là vuông góc với mặt phẳng (P) nếu a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau trong (P) .

Lưu ý: Nếu $a \perp (P)$ thì a vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong (P) .

2. Hai mặt phẳng vuông góc

Hai mặt phẳng gọi là vuông góc với nhau nếu trong mặt phẳng này tồn tại một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng còn lại.

3. Thể tích của hình hộp chữ nhật

Thể tích của hình hộp chữ nhật bằng diện tích đáy nhân chiều cao:

$$V = abh$$

Trong đó a, b, h lần lượt là chiều dài, chiều rộng và chiều cao của hình hộp chữ nhật.

Hệ quả: Với hình lập phương thì $V = a^3$ trong đó a là độ dài cạnh của hình lập phương.

II. Các dạng bài tập

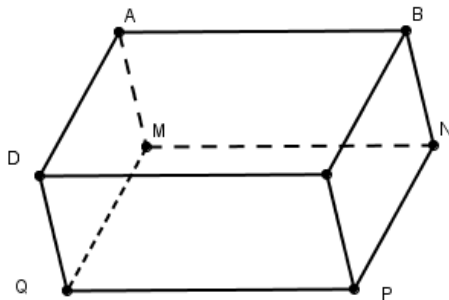
Dạng 1. Nhận biết quan hệ vuông góc giữa đường thẳng và mặt phẳng trong hình hộp chữ nhật

Phương pháp giải: Dùng các kiến thức nêu trong phần Tóm tắt lý thuyết để nhận biết.

Bài 1: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.MNPQ

- a) Đường thẳng AD vuông góc với những mặt phẳng nào?
- b) Hai mặt phẳng (AMQD) và (DQPC) có vuông góc với nhau không?

Hướng Dẫn:



- a) AD vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau AM và AB của mặt phẳng (AMNB) nên

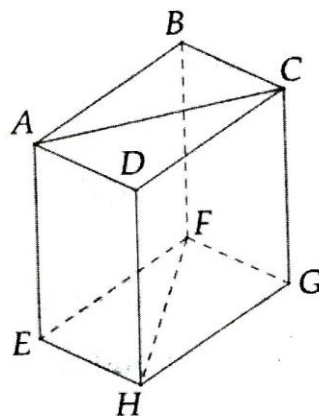
$$DA \perp mp(AMNB)$$

- AD vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau DC và DQ của mặt phẳng (DQPC) nên

$$AD \perp mp(DQPC)$$

- b) $mp(AMQD) \perp mp(DQPC)$ vì $AD \perp mp(DQPC)$ và AD nằm trong mặt phẳng (AMQD)

Bài 2: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.EFGH như hình vẽ.



- a) Kể tên các đường thẳng được vẽ trên hình và vuông góc với BF.

b) Kể tên ba cặp mặt phẳng vuông góc với nhau.

c) AC có vuông góc với DH không? Vì sao?

d) Chứng minh tam giác AEG vuông tại E. Từ đó chứng minh $AG = \sqrt{AE^2 + EF^2 + EH^2}$ (AG được gọi là đường chéo hình hộp chữ nhật).

Hướng Dẫn:

a) Các đường thẳng vuông góc với BF là: AB, BC, CD, DA, AC, EF, FG, GH, HE và FH.

b) (ABCD) và (BCGF), (CDHG) và (EFGH), (ADHE) và (ABCD)

Lưu ý: HS có thể liệt kê tên các cặp mặt phẳng khác.

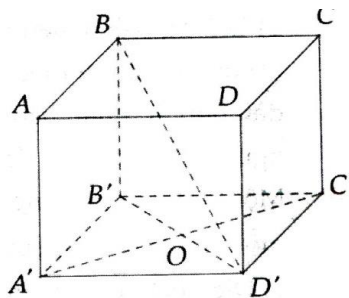
c) $AC \perp DH$ vì $DH \perp (ABCD)$

d) Ta có $AE \perp (EFGH)$ nên $AE \perp EG$. Từ đó, theo định lý Pitago, ta được:

$$AG^2 = AE^2 + EG^2 = AE^2 + EF^2 + EH^2$$

Bài 3: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' như hình vẽ.

a) Nêu vị trí tương đối của các cặp đường thẳng BC' và A'D'; DD' và AB; AA' và A'C'.



b) Chứng minh A'C' vuông góc với (BB'D'). Từ đó chứng minh A'C' vuông góc BD'.

c) Chứng minh $BO = \sqrt{BB'^2 + \frac{1}{4}(B'A'^2 + B'C'^2)}$

Hướng Dẫn:

a) HS tự làm

b) Chú ý: $A'C' \perp BB'$ và $A'C' \perp B'D'$

c) HS tự chứng minh

Dạng 2. Tính toán thể tích và các số liệu liên quan đến cạnh và mặt của hình hộp chữ nhật

Phương pháp giải: Đưa các dữ liệu của cạnh, góc về trong cùng một mặt phẳng và sử dụng các công thức đã biết trong hình học phẳng để tính.

Bài 1: Cho biết một bể bơi tiêu chuẩn có chiều dài 50 m, chiều rộng 25 m và cao 2,3 m. Người ta bơm nước vào bể sao cho nước cách mép bể 0,5 m.

- Tính thể tích nước trong bể.
- Tính thể tích phần bể không chứa nước.

Hướng Dẫn:

a) Nước trong bể tạo thành một hình hộp chữ nhật có chiều dài 50m, chiều rộng 25m và chiều cao 1,8m.

Từ đó ta tính được thể tích nước trong bể $V_1 = 2250m^3$.

b) Cách 1: Phần bể không chứa nước tạo thành một hình hộp chữ nhật có chiều dài 50m, chiều rộng 25m và chiều cao 0,5m. Từ đó tính được $V_2 = 625m^3$.

Cách 2: Thể tích của cả bể là $V = 2872m^3$. Từ đó $V_2 = 625m^3$.

Bài 2 : Tính các kích thước của hình hộp chữ nhật, biết rằng chúng tỉ lệ với 3, 4, 5 và thể tích của hình hộp này là $480cm^3$

Hướng Dẫn:

Gọi các kích thước của hình hộp là a, b, c

Theo giả thiết ta có $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = k$ và $V = abc = 480cm^3$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có $k^3 = \frac{abc}{3.4.5} = \frac{480}{60} = 8$

$$\Rightarrow k = 2$$

Vậy các kích thước của hình hộp là a = 6cm, b = 8cm, c = 10cm.

Bài 3:: Diện tích toàn phần của một hình lập phương là $486cm^3$. Thể tích của nó là bao nhiêu?

Hướng Dẫn:

Hình lập phương có 6 mặt là các hình vuông bằng nhau. Vậy diện tích một mặt hình vuông là $486:6 = 81 cm^2$. Một cạnh hình lập phương dài bằng a=9cm. Thể tích hình lập phương là

$$V = 9.9.9 = 729 cm^3$$

Bài 4: Tính các kích thước của hình hộp chữ nhật biết rằng chúng tỉ lệ với 2, 3, 4 và thể tích của hình hộp bằng $1536 cm^3$

Hướng Dẫn:

Gọi 3 kích thước của hình hộp chữ nhật lần lượt là a, b, c

Ta có $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = k$ và $V = abc = 1536 cm^3$

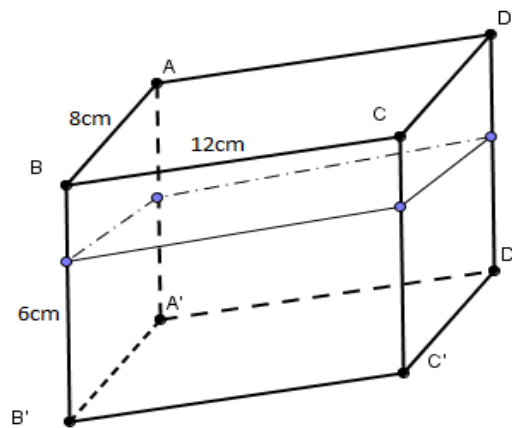
$$\text{Suy ra } k^3 = \frac{abc}{2.3.4} = \frac{1536}{24} = 64$$
$$\Rightarrow k = 4$$

$$\text{Vậy } \frac{a}{2} = 4 \Rightarrow a = 8; \frac{b}{3} = 4 \Rightarrow b = 12; \frac{c}{4} = 4 \Rightarrow c = 16$$

Vậy 3 kích thước của hình hộp lần lượt là 8; 12; 16

Bài 5. Một bể đựng nước có dạng hình hộp chữ nhật (xem hình vẽ). Mực nước hiện tại bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của bình. Nếu ta đập bình lại rồi dựng đứng lên (lấy mặt (AA'B'B) làm đáy) thì chiều cao của mực nước là bao nhiêu?

Hướng Dẫn:



Thể tích hình hộp chữ nhật là $V = 6.8.12 = 576cm^3$

Thể tích nước chứa trong hình hộp là $V_1 = 8.12.\left(\frac{2}{3}.6\right) = 384cm^3$

Nếu chọn (AA'B'B) làm đáy. Gọi h là chiều cao mực nước mới, ta có thể tích

$$V_1 = 8.6.h \Rightarrow 384 = 48h \Rightarrow h = 8cm$$

Vậy chiều cao mực nước mới là 8cm

Bài 6. Một hình hộp chữ nhật có thể tích bằng $60cm^3$ và diện tích toàn phần bằng $94cm^2$. Tính chiều rộng, chiều dài của hình hộp chữ nhật biết chiều cao bằng 4cm.

Hướng Dẫn:

Gọi hai kích của hình hộp lần lượt là a, b

$$\text{Ta có } V = 4ab = 60cm^3 \Rightarrow ab = 15 \quad (1)$$

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{day} = 2ph + 2ab$$

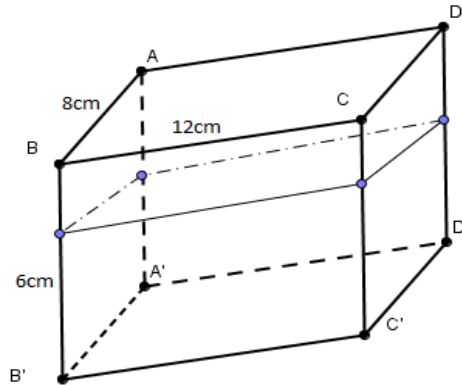
$$S_{tp} = 2(a + b).4 + 2ab = 94$$

$$\text{Hay } a + b = 8 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $a = 5; b = 3$ hoặc $a = 3; b = 5$

Vậy hai kích thước của hình hộp chữ nhật là 3cm và 5 cm.

Bài 7. Một bể đựng nước có dạng hình hộp chữ nhật (xem hình vẽ). Mực nước hiện tại bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của bình. Nếu ta đập bình lại rồi dựng đứng lên (lấy mặt (ADD'A') làm đáy) thì chiều cao của mực nước là bao nhiêu?



Hướng Dẫn:

Thể tích hình hộp chữ nhật là $V = 6.8.12 = 576cm^3$

Thể tích nước chứa trong hình hộp là $V_1 = 8.12.\left(\frac{2}{3}.6\right) = 384cm^3$

Nếu chọn (ADD'A') làm đáy . Gọi h là chiều cao mực nước mới, ta có thể tích

$$V_1 = 12.6.h \Rightarrow 384 = 72h \Rightarrow h = 5,3cm$$

Vậy chiều cao mực nước mới là 5,3cm

Bài 8. Một bình đựng nước có dạng hình hộp chữ nhật có chiều rộng bằng 4cm, chiều dài bằng 8cm, chiều cao bằng 5cm. Mực nước hiện tại bằng $\frac{3}{4}$ chiều cao của bình. Nếu ta đổ nước trong bình vào một bình khác hình lập phương có cạnh bằng 5cm thì chiều cao mực nước là bao nhiêu?

Hướng Dẫn:

Thể tích nước có trong hình hộp là $V = \frac{3}{4}.5.8.4 = 120cm^3$

Gọi h là chiều cao của mực nước mới ở bình hình lập phương có cạnh là 5cm, ta có

$$h = \frac{V}{25} = \frac{120}{25} = 4,8cm$$

Bài 9: Một hồ cá cảnh mini có dạng hình hộp chữ nhật với chiều cao 5 dm, chiều rộng 3 dm và chiều dài 4 dm. Người ta đổ vào hồ cá 50 dm³ nước.

- a) Hỏi chiều cao của khối nước trong bể là bao nhiêu dm?
- b) Tính thể tích phần hồ cá không chứa nước.

Hướng Dẫn:

- a) $\frac{25}{6}dm$
- b) $10dm^3$

Bài 10: Một chiếc hộp dạng hình hộp chữ nhật có chiều cao 8 cm, chiều rộng 6 cm và chiều dài 24cm. Người ta định đặt một cái que dài 27 cm vào trong hộp.

- a) Hỏi toàn bộ cái que có ở trong hộp không? Vì sao?
- b) Giữ nguyên chiều cao và chiều rộng của hộp. Nếu muốn đặt cái que lọt đúng theo một cạnh của đáy hộp thì phải tăng chiều dài hộp ít nhất bao nhiêu cm? (Biết số đo các chiều là số nguyên). Tính diện tích toàn phần của hộp khi đó.

Hướng Dẫn:

a) Độ dài đường chéo chiếc hộp là $\sqrt{8^2 + 6^2 + 24^2} = 26cm$

Từ đó không thể đặt cái que ở hẳn trong hộp.

b) Chiều dài mới của hộp là 27cm. Từ đó ta tính được diện tích toàn phần của chiếc hộp là: $S_{tp} = 852cm^2$

Bài 11. Một hình lập phương có cạnh bằng 1. Người ta tăng độ dài của mỗi cạnh của nó thêm 20%.

- a) Diện tích toàn phần của nó tăng bao nhiêu phần trăm?
- b) Thể tích của nó tăng bao nhiêu phần trăm?

Hướng Dẫn:

- a) 44%
- b) 72,8%

III. Bài tập tự luyện

Bài 1: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'. Gọi M, N lần lượt là trung điểm BD và B'D'

- a) Nêu vị trí tương đối của các cặp đường thẳng MN và BD; MN và CC'; AC và A'D'.
- b) Chứng minh $MN \perp (A'B'C'D')$.
- c) Biết $AA' = 20$ cm, $AB = 30$ cm, $AD = 40$ cm. Tính B'D'; B'M.
- d) Tính thể tích hình hộp.

Hướng Dẫn:

- a) Ta có MN cắt BD tại M.

MN//CC', AC và A'D' chéo nhau.

b) $MN \perp A'C'$ và $B'D'$

c) $B'S' = 50\text{cm}$, $B'M = 5\sqrt{41}\text{cm}$

d) $V = 24000\text{cm}^3$

Bài 2:. Một cái thùng có dạng hình hộp chữ nhật, cao 1m, dài 50cm và rộng 50cm. Các bác thợ xây đổ một lượng nước bằng 50% thể tích của thùng rồi thả vào đó 50 viên gạch hình hộp chữ nhật, mỗi viên có các kích thước cao, dài, rộng lần lượt là 10cm, 20cm, 15cm. Hỏi nước trong thùng có bị tràn ra ngoài không? Vì sao? (Việc ngâm gạch trong nước để khi xây nhà gạch không hút nước từ phần "vữa" để không gây hiện tượng nứt tường).

Hướng Dẫn:

Vì $V_{\text{thùng}} = 250000\text{cm}^3$ và $V_{\text{gạch}} = 150000\text{cm}^3$ nên nước bị tràn ra ngoài.

BÀI 4. HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG

I. Lí Thuyết

1. Hình lăng trụ đứng

Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.

2. Các khái niệm liên quan

Trong hình lăng trụ đứng ở hình bên:

Các đỉnh là A, B, C, D, A', B', C' và D'.

Các mặt đáy là ABCD và A'B'C'D'.

Các mặt bên là ADD'A', DCCD', CBB'C' và BAA'B'.

Các cạnh bên là AA', BB', CC' và DD'.

Các cạnh bên của hình lăng trụ đứng vuông góc với hai đáy và được gọi là chiều cao hình lăng trụ đứng.

3. Chú ý

Hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác gọi là lăng trụ đứng tam giác. Tương tự, nếu đáy là tứ giác gọi là lăng trụ đứng tứ giác, nếu đáy là ngũ giác thì gọi là lăng trụ đứng ngũ giác, ...

Hình hộp chữ nhật và hình lập phương đều là các hình lăng trụ đứng.

II. Các dạng toán

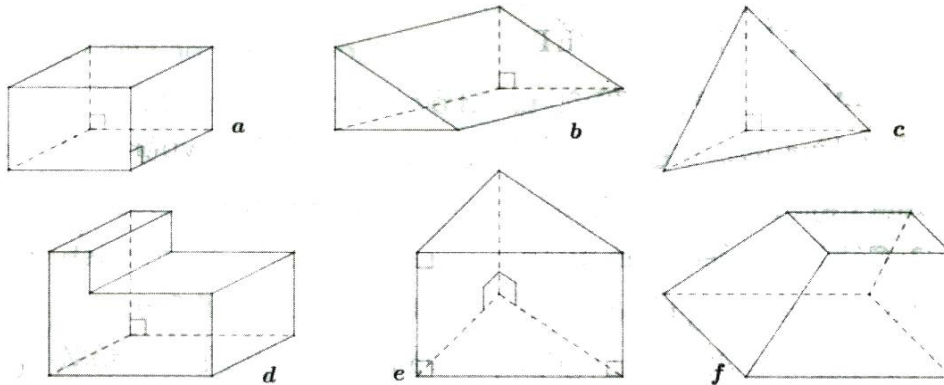
Dạng 1. Nhận biết hình lăng trụ đứng

Phương pháp giải: Để nhận biết một hình có phải là hình lăng trụ đứng hay không, ta làm như sau:

Xem hình đó có phải là hình lăng trụ hay không.

Xem các cạnh bên của hình có vuông góc với mặt đáy hay không. Từ đó áp dụng khái niệm hình lăng trụ đứng để đi đến kết luận.

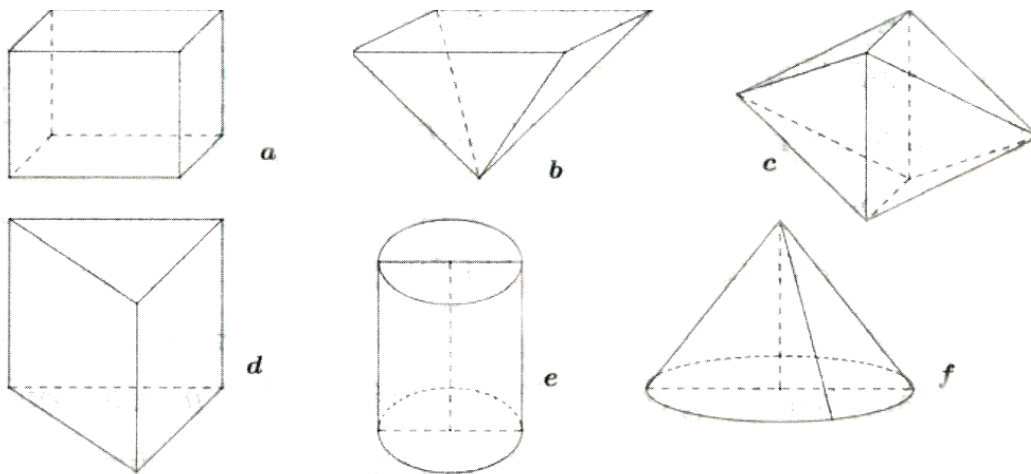
Bài 1: Trong các hình sau, đâu là hình lăng trụ đứng? Vì sao?



Hướng Dẫn:

Các hình a, b và e là các hình lăng trụ đứng. HS tự giải thích.

Bài 2. Trong các hình sau, hình nào là hình lăng trụ đứng? Vì sao?



Hướng Dẫn:

Các hình a và d là các hình lăng trụ đứng.

Dạng 2. Xác định các đỉnh, các cạnh, các mặt và mối quan hệ giữa các cạnh với nhau giữa các mặt với nhau của hình lăng trụ đứng

Phương pháp giải: Cần nắm vững:

Các khái niệm về đỉnh, cạnh và mặt của hình lăng trụ đứng.

Vị trí tương đối của hai đường thẳng và vị trí tương đối của hai mặt phẳng trong không gian.

Bài 1: Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$.

a) Hãy kể tên các đỉnh, các cạnh, các mặt đáy và mặt bên của hình lăng trụ đứng.

b) Nêu vị trí tương đối của AB và CC'; AC và A'B'; (ABB'A') và (BCC'B').

Hướng Dẫn:

a) Ta có:

Các đỉnh: A, B, C, A', B' và C'

Các cạnh bên: AA', BB' và CC'.

Các cạnh đáy: AB, BC, CA, A'B', B'C' và C'A'.

Các mặt đáy: ABC và A'B'C'

Các mặt bên: ABB'A', BCC'B' và CAA'C'

b) AB và CC' chéo nhau, AC và A'B' chéo nhau. Các mặt phẳng (ABB'A') và (BCC'B') cắt nhau theo giao tuyến BB'.

Bài 2: Cho hình lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C'. Dựng hình bình hành ABDC và A'C'D'B'.

a) Xét hình lăng trụ đứng ABDC.A'B'D'C'

i) Có bao nhiêu đỉnh, bao nhiêu cạnh, bao nhiêu mặt?

ii) Có là hình hộp chữ nhật không? Vì sao?

b) Trong các cặp mặt phẳng (ADD'A') và (BCC'B'); (ACC'A') và (BDD'B'); (BCC'B') và (ABDC); cặp mặt phẳng nào vuông góc với nhau? Vì sao?

Hướng Dẫn:

a) (i) Có 8 đỉnh, 12 cạnh và 6 mặt.

(ii) Hình lăng trụ đứng ABDC.A'B'D'C' không là hình hộp chữ nhật vì các đáy không phải là hình chữ nhật.

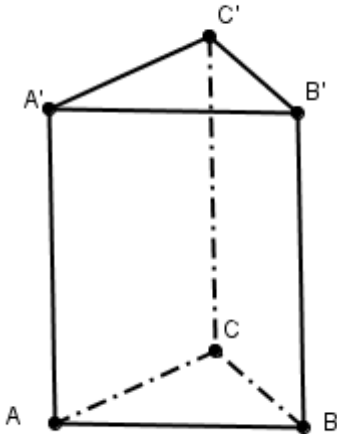
b) (BCC'B') \perp (ABDC)

Bài 3: Cho hình lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C'.

a) Những cặp mặt phẳng nào song song với nhau?

b) Những cặp mặt phẳng nào vuông góc với nhau?

Hướng Dẫn:



a) Những cặp mặt phẳng song song là: $mp(ABC) // mp(A'B'C')$

b) Những cặp mặt phẳng vuông góc nhau là: $mp(ABC) \perp mp(AA'B'B)$

$$mp(ABC) \perp mp(BB'C'C)$$

$$mp(ABC) \perp mp(AA'C'C)$$

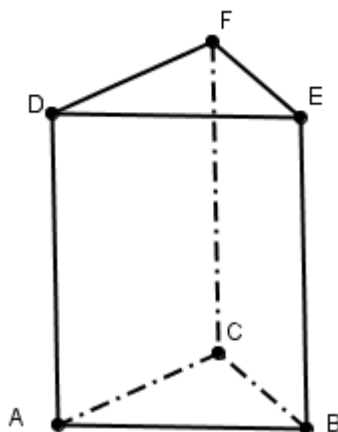
$$mp(A'B'C') \perp mp(BB'C'C)$$

$$mp(A'B'C') \perp mp(AA'C'C)$$

$$mp(A'B'C') \perp mp(AA'B'B)$$

Bài 4 : Cho hình lăng trụ đứng tam giác ABC.DEF. Trong các phát biểu sau phát biểu nào đúng ?

- a) Các cạnh bên AB và AD vuông góc với nhau.
- b) Các cạnh bên BE và EF vuông góc với nhau.
- c) Các cạnh bên AC và DF vuông góc với nhau.
- d) Các cạnh bên AC và DF song song với nhau.
- e) Hai mặt phẳng (ABC) và (DEF) song song với nhau.
- f) Hai mặt phẳng (ACFD) và (BCFE) song song với nhau.
- g) Hai mặt phẳng (ABED) và (DEF) vuông góc với nhau.



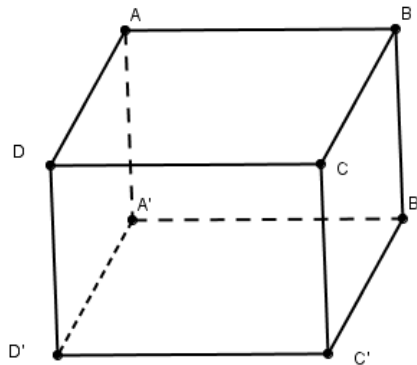
Hướng Dẫn:

- a) Sai vì AB và AD không phải là các cạnh bên.
- b) Sai vì BE và EF không phải là các cạnh bên.
- c) Sai vì AC và DF không phải là các cạnh bên.
- d) Sai vì AC và DF không phải là các cạnh bên.
- e) Đúng
- f) Sai vì Hai mặt phẳng (ACFD) và (BCFE) vuông góc nhau
- g) Đúng

Bài 5. Cho một hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'

- a) Những cặp mặt phẳng nào song song với nhau.
- b) Mặt phẳng (ABCD) vuông góc với những mặt phẳng nào.

Hướng Dẫn:



- a) Những mặt phẳng song song với nhau là: mp(ABCD)//mp(A'B'C'D');
mp(AA'D'D)// mp(BB'C'C);
mp(DCC'D')//mp(AA'B'B)
- b) mp(ABCD) \perp mp(AA'B'B)
mp(ABCD) \perp mp(BCC'B')
mp(ABCD) \perp mp(ADD'D)

Dạng 3. Tính độ dài các cạnh và các đoạn thẳng khác trong hình lăng trụ đứng

Phương pháp giải: Đưa các dữ liệu về cạnh và góc về cùng một mặt phẳng và sử dụng các kiến thức của hình học phẳng để tính toán.

Bài 1: Cho hình lăng trụ đứng ABCD.MNPQ có đường cao bằng 7 cm; đáy MNPQ là hình chữ nhật tâm o và độ dài các cạnh AB = 3 cm, AC = 5 cm. Hãy tính:

- a) Độ dài các đoạn thẳng AP và AO;
- b) Tổng diện tích hai mặt đáy của hình lăng trụ đứng.

Hướng Dẫn:

a) Tính được $AP = \sqrt{74}cm$ và $AO = \frac{\sqrt{221}}{2}cm$

b) Ta tính được $AD = 4cm$, từ đó tính được tổng diện tích hai mặt đáy là $24cm^2$.

Bài 2: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là các tam giác vuông cân tại A và A', có $BC = 3\sqrt{2}cm$ và $AB' = 5cm$. Tính:

- a) Chiều cao của hình lăng trụ;
- b) Diện tích của mặt bên $ABB'A'$ và tổng diện tích của hai mặt đáy.

Hướng Dẫn:

- a) Chiều cao lăng trụ là $4cm$.
- b) $S_{ABB'A'} = 12cm^2$ và $S_{2\text{đáy}} = 9cm^2$.

III. Bài tập tự luyện

Bài 1 Một hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác n cạnh. Hãy tính:

- a) Số đỉnh của hình lăng trụ;
- b) Số cạnh của hình lăng trụ;
- c) Số mặt của hình lăng trụ.

Hướng Dẫn:

- a) Số đỉnh là $2n$
- b) Cạnh là $3n$
- c) Số mặt là $(n + 2)$

Bài 2: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có hai đáy là các hình vuông tâm O và tâm O', $AB = 5cm$ và $AC' = 15cm$.

- a) Hình lăng trụ đứng đã cho có phải hình lập phương không? Vì sao?
- b) Chứng minh đường thẳng OO' vuông góc với mặt phẳng (ABCD).
- c) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng $(ACC'A')$ và $(BDD'B')$.
- d) Tính chiều cao của hình lăng trụ đứng.

Hướng Dẫn:

- a) Không vì $AA' \neq AB$.
- b) HS tự chứng minh.
- c) Giao tuyến là OO' .
- d) Chiều cao là $5\sqrt{7}cm$

BÀI 5 + 6. DIỆN TÍCH XUNG QUANH VÀ THỂ TÍCH HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG

I. Lí Thuyết

1. Diện tích xung quanh $S_{xq} = 2p.h$

Trong đó p là nửa chu vi đáy và h là chiều cao của hình lăng trụ đứng.

2. Diện tích toàn phần bằng tổng diện tích xung quanh và diện tích 2 đáy.

3. Thể tích của hình lăng trụ đứng $V = S.h$

Trong đó S là diện tích đáy và h là chiều cao hình lăng trụ đứng.

II. Các dạng bài tập

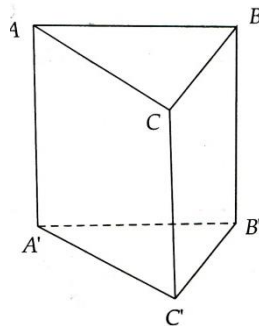
Dạng 1. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích lăng trụ đứng

Phương pháp giải: Dùng các kiến thức nêu trong phần Tóm tắt lý thuyết để tính các yêu cầu bài toán.

Bài 1: Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là các tam giác vuông tại B và B' , $AA' = 5$ cm, $AB = 2$ cm, $AC = 6$ cm.

- Tính diện tích xung quanh lăng trụ.
- Tính diện tích toàn phần lăng trụ.
- Tính thể tích lăng trụ.

Hướng Dẫn:



a) Ta có: $BC^2 = AC^2 - AB^2 \Rightarrow BC = 4\sqrt{2}$ (cm)

Diện tích xung quanh:

$$A_{xq} = (AB + AC + BC). AA' = 40 + 20\sqrt{2} \text{ (cm}^2\text{)}$$

b) Ta có:

Diện tích đáy: $S_{\triangle ABC} = 4\sqrt{2}$ (cm²)

Diện tích toàn phần lăng trụ:

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{\Delta ABC} = 40 + 28\sqrt{2} \text{ (cm}^2\text{)}$$

c) Thể tích lăng trụ

$$V = S_{\Delta ABC} \cdot AA' = 20\sqrt{2} \text{ (cm}^3\text{)}$$

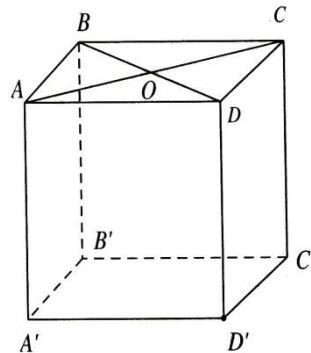
Bài 2: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh 3 cm, $\angle ABC = 60^\circ$ và chiều cao bằng 5 cm.

a) Tính diện tích xung quanh lăng trụ.

b) Tính diện tích toàn phần lăng trụ.

c) Tính thể tích lăng trụ.

Hướng Dẫn:



a) $S_{xq} = 60 \text{ (cm}^2\text{)}$

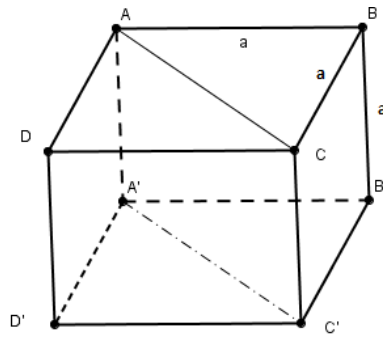
b) BD cắt AC tại O. Ta có $BO = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ (cm)}$

Diện tích toàn phần lăng trụ là: $S_{tp} = 60 + 9\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$

c) Thể tích lăng trụ: $V = \frac{45\sqrt{3}}{2} \text{ (cm}^3\text{)}$

Bài 3. Một khối gỗ hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, có cạnh bằng a. Người ta cắt khối gỗ theo mặt $(ACC'A')$ được hai hình lăng trụ đứng bằng nhau. Tính diện tích xung quanh của mỗi hình lăng trụ đó.

Hướng Dẫn:



Ta có $AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}cm$

Chu vi đáy hình lăng trụ

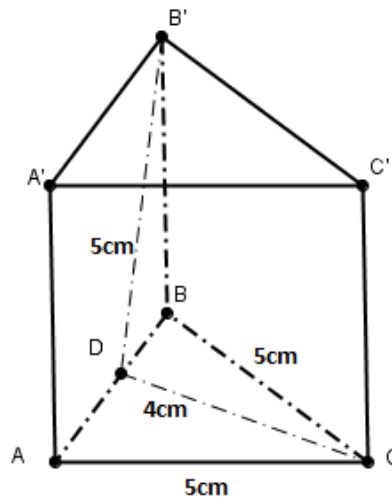
$$a + a + a\sqrt{2} = (2 + \sqrt{2})a$$

Diện tích xung quanh của hình lăng trụ

$$S_{xq} = 2ph = \frac{2(2 + \sqrt{2})a.a}{2} = (2 + \sqrt{2})a^2 cm^2$$

Bài 4: Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$, có đáy là tam giác ABC cân tại C , D là trung điểm của cạnh AB . Tính diện tích toàn phần của hình lăng trụ.

Hướng Dẫn:



D là trung điểm AB , suy ra CD là chiều cao tam giác đáy

Vậy nên $DB = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3cm$

$BB' \perp AB$, áp dụng định lí py-ta-go, ta có

$$BB' = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4cm$$

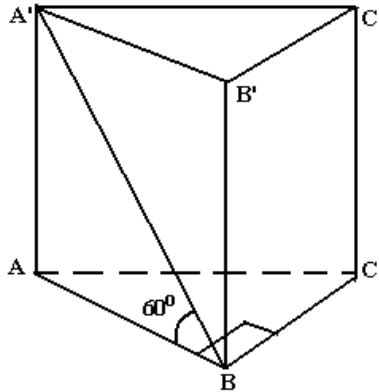
Diện tích toàn phần của hình lăng trụ là

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_d = (5 + 5 + 6).4 + 2\left(\frac{1}{2}.4.6\right)$$

$$S_{tp} = 64 + 24 = 88cm^2$$

Bài 5: Cho lăng trụ đứng tam giác ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với BA = BC = a ,biết A'B hợp với đáy ABC một góc 60^0 . Tính thể tích lăng trụ.

Hướng Dẫn:



Ta có $A'A \perp (ABC) \Rightarrow A'A \perp AB$ & AB là hình chiếu của $A'B$ trên đáy ABC và $\widehat{ABA'} = 60^0$

Trong $\Delta ABA'$ ta có

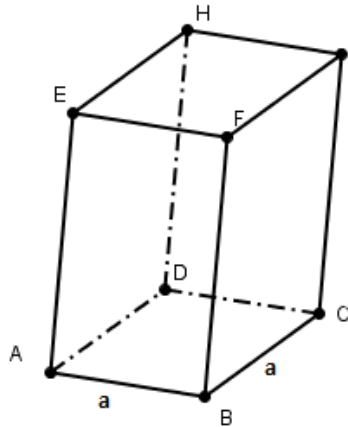
$$\Rightarrow AA' = AB \cdot \tan 60^0 = a\sqrt{3}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{Vậy } V = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{a^3 \sqrt{3}}{2}$$

Bài 6: Cho hình lăng trụ có đáy là hình vuông cạnh a. Tính chiều cao (theo a) của hình lăng trụ, biết diện tích xung quanh bằng $\frac{1}{2}$ diện tích toàn phần.

Hướng Dẫn:



Diện tích xung quanh hình trụ

$$S_{xq} = 2(a + a).h(\text{cm})$$

Diện tích toàn phần của hình trụ

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_d = 2(a + a).h + 2a.a$$

$$\Rightarrow S_{tp} = 4ah + 2a^2 = 2a(2h + a)$$

Theo đề ta có $S_{xq} = \frac{1}{2} S_{tp}$

$$\text{Hay } 4ah = \frac{1}{2} 2a(a + 2h)$$

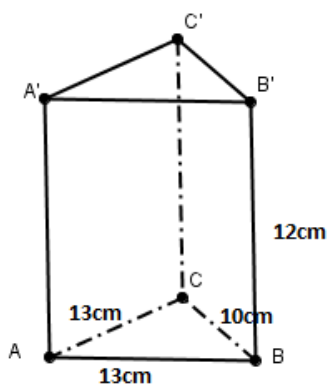
$$\Rightarrow 4h = a + 2h$$

$$\Rightarrow 2h = a \Rightarrow h = \frac{a}{2}$$

Vậy chiều cao của hình trụ là $\frac{a}{2}$ (cm)

Bài 7: Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC cân tại A có các kích thước như hình vẽ. Tính thể tích của hình lăng trụ.

Hướng Dẫn:



Chiều cao của tam giác đáy

$$h' = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25}$$

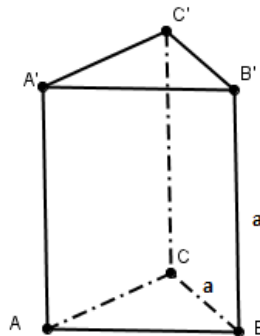
$$h' = \sqrt{144} = 12cm$$

Diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2}h'.BC = \frac{1}{2}.12.10 = 60cm^2$

Thể tích của hình lăng trụ ABC.A'B'C' là $V = S_d.h = 60.12 = 720cm^3$

Bài 8: Tính thể tích của khối lăng trụ đứng có đáy là tam giác và các mặt bên là các hình vuông cạnh bằng a.

Hướng Dẫn:



Hình lăng trụ có đáy là tam giác đều cạnh a, đường cao tam giác đáy là $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}cm$

Diện tích tam giác đáy là $S = \frac{1}{2} \frac{a\sqrt{3}}{2} a = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

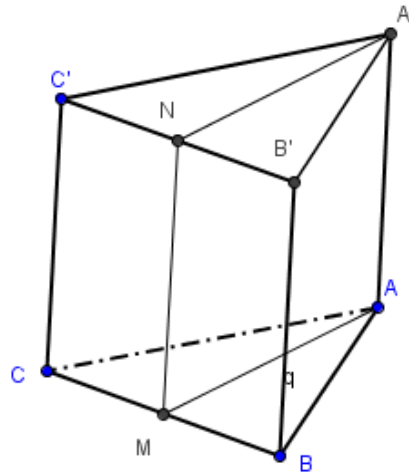
Thể tích hình lăng trụ là $V = S.h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} a = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}cm^3$

Bài 9: Cho hình lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C' có đáy là tam giác ABC cân tại A. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và B'C'

a) Chứng minh AMNA' là hình chữ nhật

b) Tính diện tích hình chữ nhật AMNA' biết thể tích của hình lăng trụ bằng V và BC = a.

Hướng Dẫn:



a) Ta có $A'N \parallel AM$ và $A'N = AM$ nên $A'NMA$ là hình bình hành.

Mặt khác $A'N \perp mp(CC'B'B)$ nên $A'N \perp NM$

Vậy $AMNA'$ là hình chữ nhật

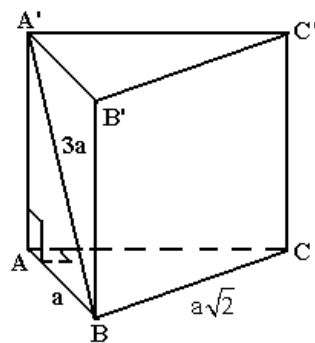
$$b) V = S_d \cdot h = \frac{1}{2} AM \cdot BC \cdot AA'$$

mà $AA' = MN$ nên diện tích hình chữ nhật $AMNA'$ là

$$S = \frac{1}{2} AM \cdot AA' = \frac{V}{a} (cm^2)$$

Bài 10: Đáy của lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ là tam giác ABC vuông cân tại A có cạnh $BC = a\sqrt{2}$ và biết $A'B = 3a$. Tính thể tích khối lăng trụ.

Hướng Dẫn:



Ta có

ΔABC vuông cân tại A nên $AB = AC = a$

$ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng $\Rightarrow AA' \perp AB$

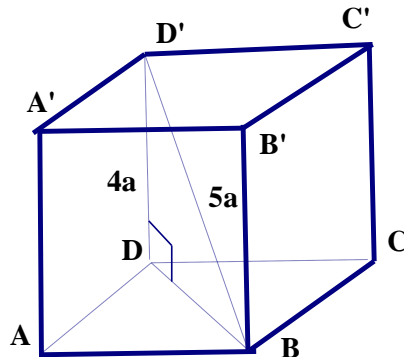
$$\Delta AA'B \Rightarrow AA'^2 = A'B^2 - AB^2 = 8a^2$$

$$\Rightarrow AA' = 2a\sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } V = B \cdot h = S_{ABC} \cdot AA' = a^3\sqrt{2}$$

Bài 11: Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bên bằng $4a$ và đường chéo $5a$. Tính thể tích khối lăng trụ này.

Hướng Dẫn:



$ABCD A'B'C'D'$ là lăng trụ đứng nên

$$BD^2 = BD'^2 - DD'^2 = 9a^2 \Rightarrow BD = 3a$$

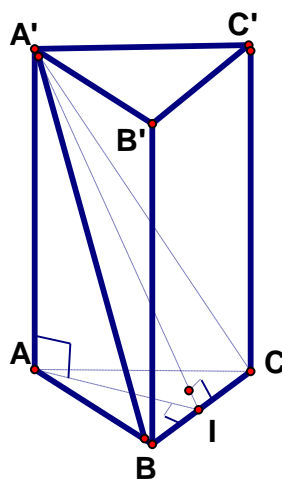
$$ABCD \text{ là hình vuông} \Rightarrow AB = \frac{3a}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Suy ra } B = S_{ABCD} = \frac{9a^2}{4}$$

$$\text{Vậy } V = B \cdot h = S_{ABCD} \cdot AA' = 9a^3$$

Bài 12: Đáy của lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ là tam giác đều cạnh $a=4$ và biết diện tích tam giác $A'BC$ bằng 8. Tính thể tích khối lăng trụ.

Hướng Dẫn:



Gọi I là trung điểm BC . Ta có ΔABC đều nên

$$AI = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ \& } AI \perp BC \Rightarrow A'I \perp BC$$

$$S_{A'BC} = \frac{1}{2} BC \cdot AI \Rightarrow AI = \frac{2S_{A'BC}}{BC} = 4$$

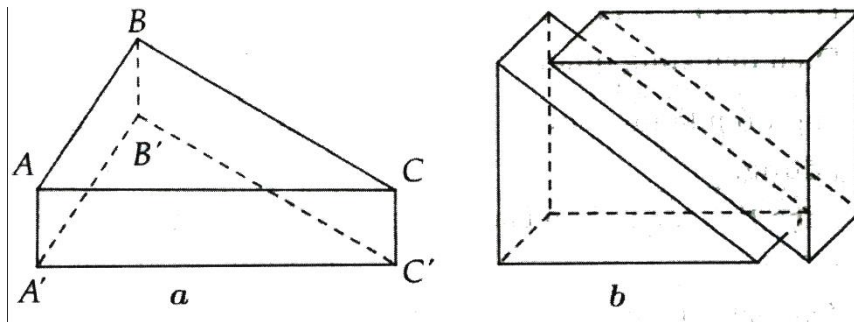
$$AA' \perp (ABC) \Rightarrow AA' \perp AI \Rightarrow AA' = \sqrt{A'I^2 - AI^2} = 2$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot AA' = 8\sqrt{3}$$

Dạng 2. Lắp ghép một số lăng trụ đơn giản và tính toán các dữ liệu của lăng trụ đứng.

Phương pháp giải: Nhận biết khối hình trước và sau khi lắp ghép, từ đó vận dụng các kiến thức đã học để xử lý yêu cầu bài toán.

Bài 1: Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ như hình vẽ a, có đáy là tam giác ABC vuông cân tại B và $AC = 5 \text{ cm}$, $BB' = 7 \text{ cm}$.



a) Tính diện tích toàn phần của lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

b) Ghép 2 hình lăng trụ đứng có cùng kích thước như lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ (như hình) Tính thể tích của hình lăng trụ đứng mới được tạo thành.

Hướng Dẫn:

a) Ta có: $AC^2 = 2AB^2 \Rightarrow AB = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ (cm)}$

$$\text{Diện tích đáy } S_{\Delta ABC} = \frac{25}{4} \text{ (cm}^2\text{)}$$

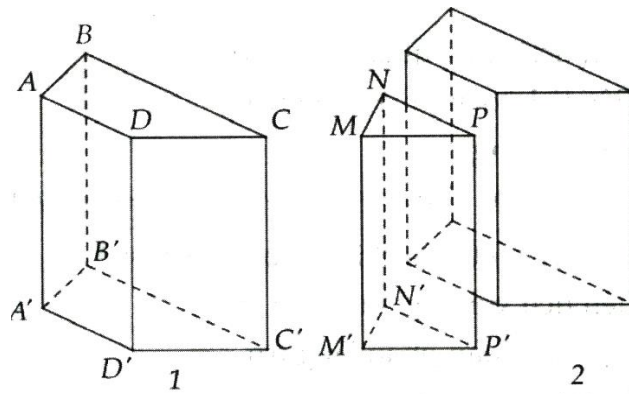
$$\text{Diện tích xung quanh lăng trụ: } S_{xq} = 35 + 35\sqrt{2} \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{Diện tích toàn phần } S_{tp} = S_{xq} + 2S_{\Delta ABC} = \frac{95 + 70\sqrt{2}}{2} \text{ (cm}^2\text{)}$$

b) Thể tích lang trụ tạo thành

$$V = 2V_{ABC.A'B'C'} = 2S_{\Delta ABC} \cdot BB' = \frac{175}{2} \text{ (cm}^3\text{)}$$

Bài 2: Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ (như hình 1) có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B . Biết $BC = 10 \text{ cm}$, $AB = AD = 5 \text{ cm}$, $AA' = 8 \text{ cm}$.



a) Tính diện tích toàn phần lăng trụ (làm tròn đến chữ số hàng phần trăm).

b) Người ta ghép thêm một hình lăng trụ đứng tam giác MNP.M'N'P' vào hình lăng trụ 1 để được một lăng trụ đứng tam giác (như ở hình 2). Tính thể tích hình lăng trụ đứng sau khi ghép biết tam giác MNP vuông tại N và $MN = 5 \text{ cm}$, $MP = 5\sqrt{2} \text{ cm}$, $MM' = 8 \text{ cm}$.

Hướng Dẫn:

a) Kẻ DH vuông góc BC (H thuộc BC). Ta tính được $DC = 5\sqrt{2} \text{ (cm)}$

Diện tích xung quanh hình lăng trụ:

$$S_{xq} = 160 + 40\sqrt{2} \text{ (cm}^2\text{)}$$

Diện tích toàn phần của lăng trụ:

$$S_{tp} = 235 + 40\sqrt{2} \approx 291,57 \text{ (cm}^2\text{)}$$

b) Cách 1: Tính gián tiếp

Thể tích hình lăng trụ tạo thành

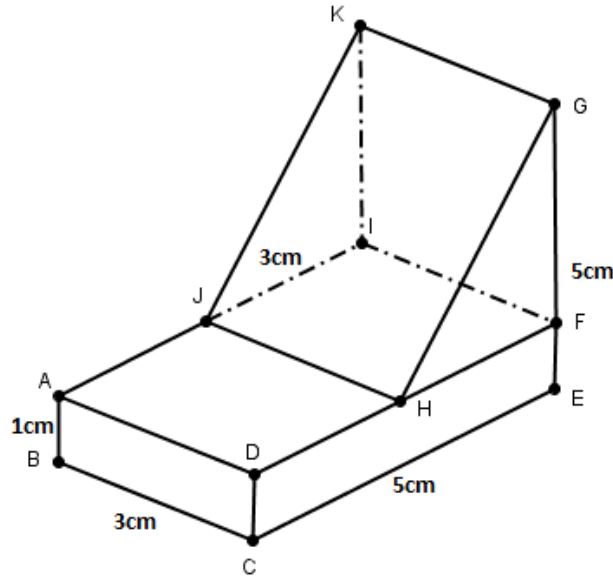
$$V = V_{ABCD.A'B'C'D'} + V_{MNP.M'N'P'} = 400 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Cách 2: Tính trực tiếp

$$V = V_{MBCM'.B'C'} = S_{\Delta MBC} \cdot MM' = 400 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Bài 3. Tính diện tích toàn phần (tổng diện tích các mặt) và thể tích của hình sau

Hướng Dẫn:



Tính diện tích toàn phần hình lăng trụ HFG.JIK

Độ dài đường chéo của tam giác đáy là $JK = HG = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5\text{cm}$

Diện tích tam giác đáy $S_{\Delta HFG} = S_{\Delta JIK} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6\text{cm}^2$

Diện tích toàn phần hình lăng trụ HFG.JIK

$$S_{tp1} = S_{xq} + 2S_{day} = 2 \left(\frac{3 + 4 + 5}{2} \right) \cdot 3 + 2 \cdot 6 = 48\text{cm}^2$$

Tính diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật ABCD.EFII'

$$S_{tp2} = S_{xq} + 2S_d = 2(1 + 3) \cdot 5 + 2 \cdot 1 \cdot 3 = 46\text{cm}^2$$

$$S_{JIFH} = 3 \cdot 3 = 9\text{cm}^2$$

Diện tích toàn phần của hình đã cho là

$$S_{tp} = S_{tp1} + S_{tp2} - S_{JIFH} = 48 + 46 - 9 = 85\text{cm}^2$$

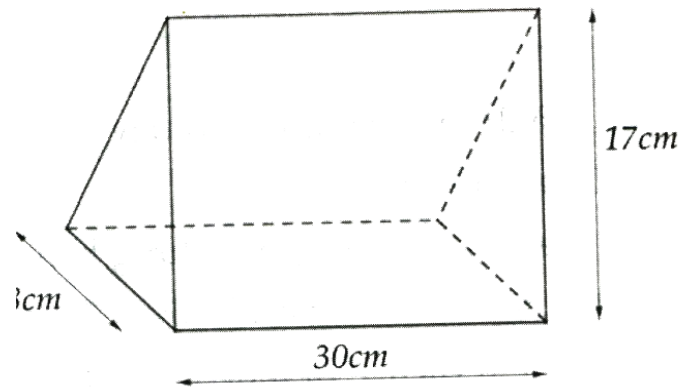
Thể tích hình lăng trụ $V_1 = S_d \cdot h = 6 \cdot 3 = 18\text{cm}^3$

Thể tích hình hộp chữ nhật $V_2 = S_d \cdot h = 3 \cdot 5 = 15\text{cm}^3$

Thể tích của hình đã cho là $V = V_1 + V_2 = 18 + 15 = 33\text{cm}^3$

Dạng 3. Một số bài toán thực tế trong cuộc sống liên quan đến lăng trụ đứng

Bài 1: Một cuốn lịch để bàn có dạng hình lăng trụ đứng tam giác. Biết cuốn lịch có chiều cao bằng 30 cm, đáy là tam giác cân có cạnh bên 17cm và cạnh đáy bằng 8cm. Tính diện tích toàn phần và thể tích của cuốn lịch.



Hướng Dẫn:

Diện tích đáy của cuốn lịch là: $S = 4\sqrt{273} \text{ (cm}^2\text{)}$

Diện tích xung quanh của hình lăng trụ là: $S_{xq} = 1260 \text{ (cm}^2\text{)}$

Diện tích toàn phần của hình lăng trụ là: $S_{tp} = 1260 + 8\sqrt{273} \text{ (cm}^2\text{)}$

Thể tích của cuốn lịch là:

$$V = S.h = 4\sqrt{273}.30 = 120\sqrt{273} \text{ (cm}^3\text{)}$$

Bài 2: Một gia đình xây bể chứa nước hình lăng trụ đứng, phần trong lòng bể có đáy là hình vuông cạnh 1,5 m, chiều cao bể là 1 m. Sau đó họ dùng các viên gạch men kích thước 20x30 cm, dày 1 cm để ốp xung quanh thành bể và đáy bể. Hỏi gia đình đó cần ít nhất bao nhiêu viên gạch ốp và sau khi ốp bể chứa được khoảng bao nhiêu lít nước?

Hướng Dẫn:

Diện tích cần ốp gạch là 82500cm^2 và diện tích của mỗi viên gạch là 600cm^2 . Từ đó tìm được số viên gạch cần ít nhất để ốp thành bể là 137,5 viên.

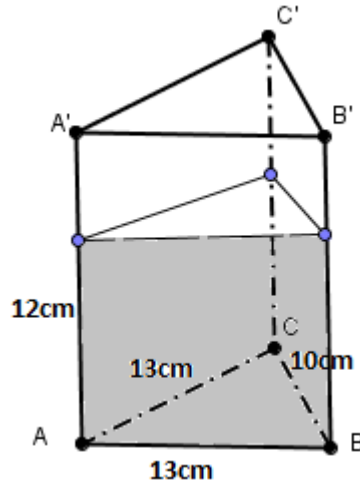
Thể tích của mỗi viên gạch là $0,0006\text{m}^3$ và thể tích của bể là $2,25\text{m}^3$.

Từ đó tính được thể tích phần bể trống sau khi lát gạch là $2,1675\text{m}^3$

Vậy thể tích nước có thể chứa của bể là 2167,5l.

Bài 3: Một bình thủy tinh hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy là tam giác cân ABC có kích thước như hình vẽ. Mực nước hiện tại trong bình bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của lăng trụ. Bây giờ ta đặt bình lại và lật đứng lên sao cho mặt $(BCC'B')$ là mặt đáy. Tính chiều cao của mực nước khi đó.

Hướng Dẫn:



Chiều cao của tam giác đáy

$$h' = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25}$$

$$h' = \sqrt{144} = 12cm$$

Diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2} h'.BC = \frac{1}{2} .12.10 = 60cm^2$

Thể tích nước hiện tại trong hình lăng trụ là $V = 60. \frac{2}{3} .12 = 480cm^3$

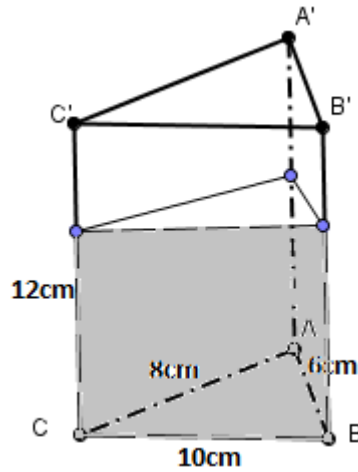
Nếu chọn đáy là (BCC'B') thì $S_d = 10.12 = 120cm^2$

Chiều cao mực nước mới là $h' = \frac{V}{S_d} = \frac{480}{120} \Rightarrow h' = 4cm$

Vậy chiều cao mực nước mới là 4cm.

Bài 4: Một Một bình thủy tinh hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy là tam giác ABC có $AB = 6cm$, $BC = 10cm$, $AC = 8cm$, chiều cao $CC' = 12cm$. Mực nước trong bình hiện tại bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của hình lăng trụ. Bây giờ ta đập bình lại và lật đứng lên sao cho mặt (ACC'A') là mặt đáy. Tính chiều cao của mực nước khi đó.

Hướng Dẫn:



Diện tích tam giác đáy là $S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24 \text{cm}^2$

Thể tích nước hiện tại trong hình lăng trụ là $V = 24 \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 = 192 \text{cm}^3$

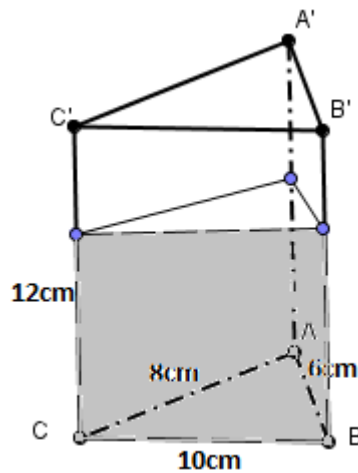
Nếu chọn đáy là $(ACC'A')$ thì $S_d = 8 \cdot 12 = 96 \text{cm}^2$

Chiều cao mực nước mới là $h' = \frac{V}{S_d} = \frac{192}{96} \Rightarrow h' = 2 \text{cm}$

Vậy chiều cao mực nước mới là 2cm.

Bài 5: Một bình thủy tinh hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy là tam giác ABC có $AB = 6 \text{cm}$, $BC = 10 \text{cm}$, $AC = 8 \text{cm}$, chiều cao $CC' = 12 \text{cm}$. Mực nước trong bình hiện tại bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của hình lăng trụ. Bây giờ ta đặt bình lại và lật đứng lên sao cho mặt $(BCC'B')$ là mặt đáy. Tính chiều cao của mực nước khi đó.

Hướng Dẫn:



Diện tích tam giác đáy là $S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24 \text{cm}^2$

Thể tích nước hiện tại trong hình lăng trụ là $V = 24 \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 = 192 \text{cm}^3$

Nếu chọn đáy là (BCC'B') thì $S_d = 6 \cdot 12 = 72 \text{cm}^2$

Chiều cao mực nước mới là $h' = \frac{V}{S_d} = \frac{192}{72} \Rightarrow h' \approx 2,7 \text{cm}$

Vậy chiều cao mực nước mới là 2,7cm.

III. Bài tập tự luyện

Bài 1: Một hộp quà hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh 10 cm, chiều cao lăng trụ bằng 12 cm.

a) Người ta dùng giấy bọc kín hộp quà, hỏi diện tích giấy cần dùng ít nhất là bao nhiêu?

b) Thể tích hộp đựng quà là bao nhiêu?

Hướng Dẫn:

a) Diện tích đáy $S_{\Delta ABC} = 25\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$

Diện tích xung quanh hộp quà: $S_{xq} = 360 \text{ (cm}^2\text{)}$

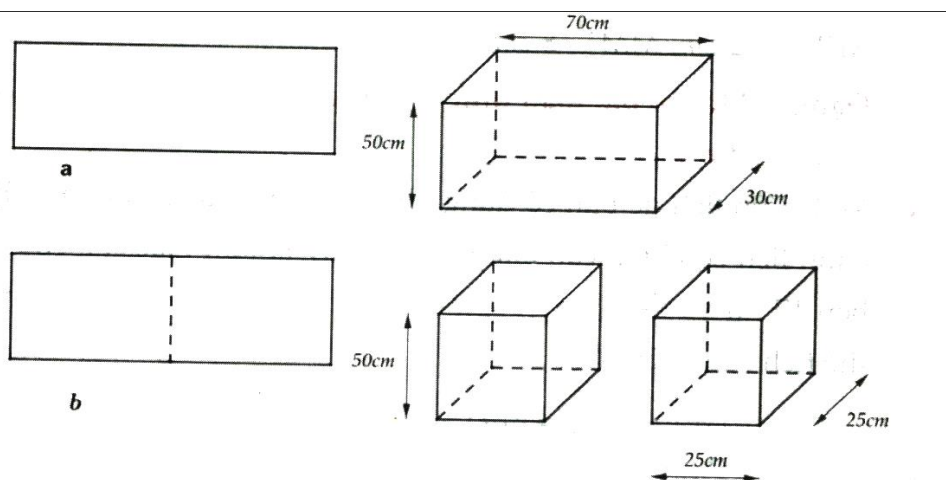
Diện tích giấy cần dùng ít nhất là:

$$S = 360 + 50\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$$

b) Thể tích hộp đựng quà là:

$$V = 300\sqrt{3} \text{ (cm}^3\text{)}$$

Bài 2: Từ một miếng tôn dài 2m, rộng 50cm, người ta gò thành một cái thùng hình lăng trụ đứng theo 2 cách:



Cách 1: Gò thành hình lăng trụ có đáy là hình chữ nhật dài 70 cm, rộng 30 cm (hình a);

Cách 2: Gò thành 2 hình lăng trụ đứng bằng nhau, mỗi lăng trụ đứng có đáy là hình vuông cạnh 25cm (hình b).

Hỏi thể tích thùng ở cách 1 và tổng thể tích các thùng ở cách 2 có bằng nhau không? Vì sao?

Hướng Dẫn:

Thể tích thùng tạo ra ở cách 1 là: $V_1 = 50.70.30 = 105000 \text{ (cm}^3\text{)}$.

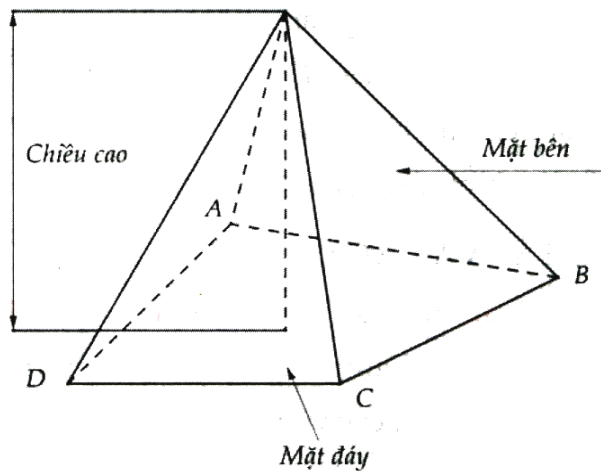
Thể tích hai thùng tạo ra ở cách 2 bằng nhau, thể tích mỗi thùng là: $V_2 = 50.25.25 = 31250 \text{ (cm}^3\text{)}$

Vậy các thùng tạo ra ở cách 1 và cách 2 có thể tích không bằng nhau.

BÀI 7. HÌNH CHÓP ĐỀU VÀ HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU

I. Lí Thuyết

1. Khái niệm hình chóp: Hình chóp có dạng như hình vẽ:



Trong đó:

SAB; SBC; SCD; SAD được gọi là các mặt bên.

ABCD được gọi là mặt đáy.

SA; SB; SC; SD được gọi là các cạnh bên.

Các cạnh bên cắt nhau tại S được gọi là đỉnh hình chóp.

Đường cao của hình chóp là đường thẳng kẻ từ đỉnh của hình chóp và vuông góc với mặt phẳng đáy.

Hình chóp có đáy là tam giác gọi là hình chóp tam giác, đáy là tứ giác gọi là hình chóp tứ giác, ...

2. Hình chóp đều: là hình chóp có đáy là đa giác đều, các mặt bên là các tam giác cân có chung đỉnh là đỉnh hình chóp.

Tính chất của hình chóp đều:

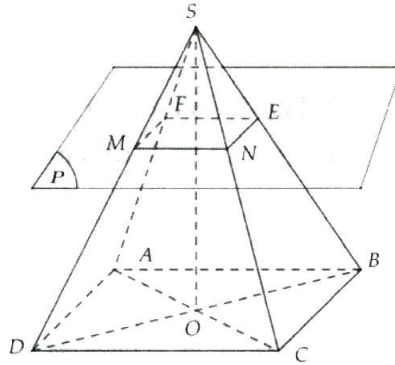
Chân đường cao của hình chóp đều trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

Chú ý: Đường cao kẻ từ đỉnh S của mỗi mặt bên gọi là trung đoạn của hình chóp đều.

3. Hình chóp cụt đều:

Cắt hình chóp đều S.ABCD bằng 1 mặt phẳng (P) song song với mặt đáy, phần hình nằm giữa (P) và mặt phẳng đáy gọi là hình chóp cụt đều.

Mỗi mặt bên của hình chóp cụt đều là 1 hình thang cân.



II. Các dạng bài tập

Dạng 1. Nhận biết các kiến thức cơ bản hình chóp đều

Phương pháp giải: Dùng các kiến thức nêu trong phần Tóm tắt lý thuyết để nhận biết các yếu tố của hình chóp đều.

Bài 1: a) Hình chóp có đáy là một hình thoi, các mặt bên là tam giác cân bằng nhau và có chung đỉnh, có thể được gọi là hình chóp tứ giác đều không?

b) Hình chóp có đáy là một hình chữ nhật, các mặt bên là tam giác cân bằng nhau và có chung đỉnh, có thể được gọi là hình chóp tứ giác đều không?

Hướng Dẫn:

a) Hình thoi không phải là một đa giác đều nên hình chóp có mặt đáy là một hình thoi không phải là hình chóp đều. Vậy phát biểu trên sai

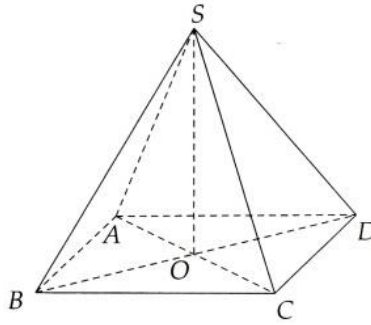
b) Sai vì hình chữ nhật không phải là đa giác đều.

Bài 2: Cho hình chóp đều S.ABCD có đường cao SO.

a) Xác định vị trí chân đường cao O của hình chóp.

b) Kể tên các cạnh bên và mặt bên của hình chóp.

Hướng Dẫn:



a) Chân đường cao O của hình chóp là giao điểm hai đường chéo AC và BD của đáy hình vuông ABCD.

b) Các cạnh bên của hình chóp là: SA, SB, SC, SD.

Các mặt bên của hình chóp là: SAB, SAD, SDC, SBC.

c) Hình chóp có S là đỉnh của hình chóp và đáy có 4 đỉnh là A, B, C, D.

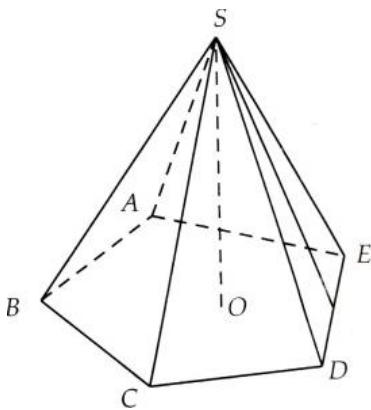
Bài 3: Cho hình chóp ngũ giác đều S.ABCDE.

a) Hình chóp có bao nhiêu cạnh và bao nhiêu đỉnh?

b) Hình chóp có bao nhiêu mặt là các tam giác cân?

c) Trong (SDE) kẻ đường SM với M là trung điểm DE. Hỏi SM là đường gì của tam giác SDE và là đường gì của hình chóp đều?

Hướng Dẫn:



a) Có 10 cạnh có 6 đỉnh.

b) Có 5 mặt là các tam giác cân.

c) SM là đường cao của tam giác SDE đồng thời là trung đoạn của hình chóp.

Bài 4. Một hình chóp đều có 10 cạnh. Hỏi đáy của hình chóp đó là đa giác đều nào?

Hướng Dẫn:

Hình chóp đều có 10 cạnh thì đáy của hình chóp đó là thập giác đều.

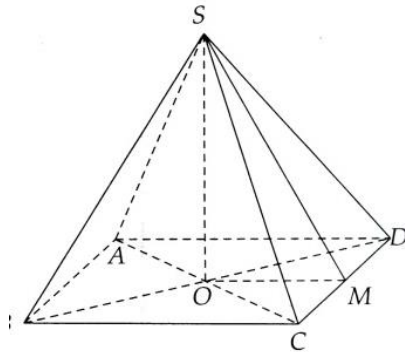
Dạng 2. Tính độ dài các cạnh, góc của hình chóp đều

Phương pháp giải: Sử dụng các kiến thức nêu trong phần Tóm tắt lý thuyết và kiến thức đã học để tính các yếu tố của hình chóp đều.

Bài 1: Cho hình chóp đều S.ABCD có độ dài đường chéo của mặt đáy bằng 6 cm và cạnh bên bằng 5 cm.

- a) Tính chiều cao hình chóp đều.
- b) Tính diện tích tam giác SCD.

Hướng Dẫn:



a) Gọi O là giao điểm của AC và BD. Ta tính được $BO = 3$ (cm)

Tam giác vuông SBO có: $SO^2 = SB^2 - BO^2$

Từ đó tính được $SO = 4$ (cm)

b) Gọi M là trung điểm của DC.

Ta có: $DC^2 = 2OC^2$

Từ đó tìm được $DC = 3\sqrt{2}$ (cm)

Trong tam giác vuông AMC ta có:

$$SM^2 = SC^2 - CM^2 \Rightarrow SM = \sqrt{20,5} \text{ (cm)}$$

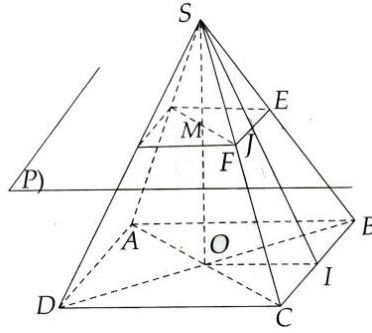
Diện tích tam giác SCD là:

$$S_{\Delta SCD} = \frac{1}{2} \cdot SM \cdot CD = \frac{3\sqrt{41}}{3} \text{ (cm}^2\text{)}$$

Bài 2: Cho hình chóp đều S.ABCD có cạnh đáy bằng 4 cm và cạnh bên bằng $\sqrt{33}$ cm. Cắt hình chóp bởi mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng đáy và cách đáy một khoảng 2 cm.

- a) Tính chiều cao của hình chóp đều phần chứa đỉnh S sau khi cắt hình chóp đều S.ABCD bởi (P).
- b) Tính diện tích một mặt bên hình chóp cụt đều.

Hướng Dẫn:



a) Gọi O là tâm của đáy ABCD, M là giao điểm của SO và mặt phẳng (P). Ta có: $OM = 2(\text{cm})$.

Ta tính được $OB = 2\sqrt{2} (\text{cm})$ rồi suy ra $SO = 5 (\text{cm})$

Từ đó chiều cao cần tìm là: $SM = SO - OM = 3 (\text{cm})$

b) Gọi I là trung điểm của BC. E, F, J lần lượt là giao điểm của SB, SC, SI với mp (p).

Có: $SI = \sqrt{SB^2 - IB^2} = \sqrt{29} (\text{cm})$

Sử dụng định lý Ta-let, ta tính được:

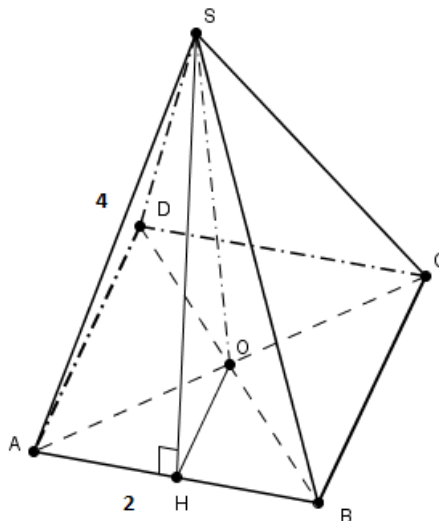
$$SJ = \frac{3\sqrt{29}}{5} (\text{cm}), EF = 2,4 (\text{cm})$$

Diện tích mặt bên của hình chóp cắt là:

$$S_{EFBC} = S_{\Delta SBC} - S_{\Delta SEF} = \frac{32\sqrt{29}}{25} (\text{cm}^2)$$

Bài 3: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có $AB = 2\text{cm}$, $SA = 4\text{cm}$. Tính độ dài trung đoạn và chiều cao của hình chóp đều này.

Hướng Dẫn:



Hình chóp tứ giác đều S.ABCD có AB = 2cm, SA = 4cm, nên ABCD là hình vuông và các cạnh bên bằng nhau.

$$\text{Ta có } AC = BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$AO = \frac{AC}{2} = \sqrt{2}$$

Trong tam giác vuông SOA vuông tại O, theo pytago ta có

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{4^2 - (\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}$$

Vậy chiều cao hình chóp là $3\sqrt{2}cm$

Gọi H là trung điểm AB, ta có SH là trung đoạn của hình chóp

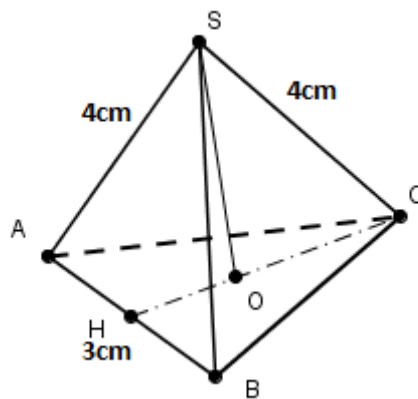
Trong tam giác SBH vuông tại H, theo pytago ta có

$$SH = \sqrt{SB^2 - HB^2} = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$$

Vậy độ dài trung đoạn là $\sqrt{15}cm$

Bài 4: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có AB = 3cm, cạnh bên SA = 4cm. Tính chiều cao của hình chóp.

Hướng Dẫn:



Hình chóp tam giác đều S.ABC nên ABC là tam giác đều.

Gọi H là trung điểm AB, O là trọng tâm tam giác ABC

Ta có CH là đường cao tam giác ABC

Trong tam giác CHB vuông tại H ta có

$$HC = \sqrt{CB^2 - HB^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$OC = \frac{2}{3}CH = \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

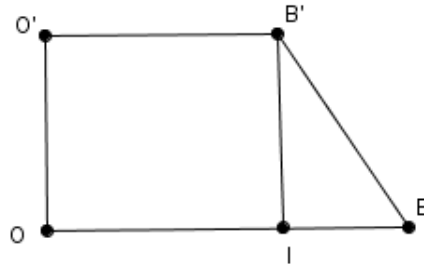
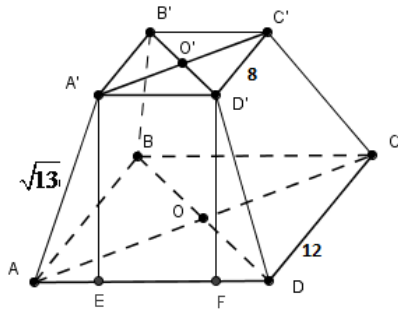
Trong tam giác vuông SOC vuông tại O ta có $SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{4^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{13}$

Vậy chiều cao của hình chóp là $\sqrt{13}cm$

Bài 5: Một hình chóp cắt đều có đáy lớn bằng 12cm, đáy bé bằng 8cm và cạnh bên bằng $\sqrt{13}cm$.

Tính độ dài trung đoạn và chiều cao của hình chóp cắt đó.

Hướng Dẫn:



Hình chóp cắt đều ta thấy mặt bên là hình thang cân AA'D'D. Vẽ đường cao A'E và D'F ,

Ta có: $A'E = D'F = \frac{AD - A'D'}{2} = \frac{12 - 8}{2} = 2$

Vậy độ dài trung đoạn là 2 cm

Khai triển hình chóp cắt đều ta thấy

Trong hình thang vuông OBB'O' vẽ đường cao B'I ta có

$$OB = \frac{BD}{2} = 6\sqrt{2}; O'B' = 4\sqrt{2}$$

$$BI = OB - O'B' = 2\sqrt{2}$$

Vậy đường cao hình chóp cắt đều là

$$B'I = \sqrt{B'B^2 - BI^2}$$

$$B'I = \sqrt{(\sqrt{13})^2 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{5}$$

III. Bài tập tự luyện

Bài 1: Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng?

- a) Hình chóp đều S.ABCD có đáy là hình bình hành.
- b) Hình chóp đều S.ABCD có đáy là hình thoi, chân đường cao hình chóp là giao điểm của 2 đường chéo hình thoi.
- c) Hình chóp đều S.ABCD có đáy là hình vuông, chân đường cao hình chóp là giao điểm của 2 đường chéo hình vuông.
- d) Hình chóp đều S.ABCD có đáy là hình vuông, các mặt bên là các tam giác đều chung đỉnh S.

Hướng Dẫn:

Phát biểu c) đúng.

Bài 2: Kim tự tháp Kê-ôp (Kheops) ở Ai Cập có hình dạng là một hình chóp tứ giác đều. Biết chiều cao kim tự tháp là 137m, cạnh đáy dài 231 m. Tính cạnh bên và diện tích một mặt bên của kim tự tháp.

Hướng Dẫn:

Kim tự tháp S.ABCD (như hình vẽ). Gọi M là trung điểm của CD và O là giao điểm của AC và BD.

$$CD^2 = 2OC^2 \Rightarrow OC = \frac{231\sqrt{2}}{2} (m)$$

$$\text{Cạnh bên: } SC = \sqrt{45449,5} (m)$$

$$\text{Tính được } SM = \sqrt{32109,25} (m)$$

Diện tích mặt bên của kim tự tháp là:

$$S_{\Delta SCD} = \frac{1}{2} SM \cdot CD = \sqrt{428345422,3} \approx 20696,507 (m^2)$$

BÀI 8+9. DIỆN TÍCH XUNG QUANH VÀ THỂ TÍCH CỦA HÌNH CHÓP ĐỀU

I.Lí Thuyết

1. Diện tích xung quanh của hình chóp đều $S_{xq} = p.d$

Trong đó p là nửa chu vi đáy và d là độ dài trung đoạn của hình chóp đều.

2. Diện tích toàn phần của hình chóp đều bằng tổng của diện tích xung quanh và diện tích mặt đáy.

3. Thể tích của hình chóp đều $V = \frac{1}{3} S.h$

Trong đó S và h lần lượt là diện tích mặt đáy và chiều cao hình chóp đều.

II. Các dạng bài tập

Dạng 1. Các bài toán về diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể hình chóp đều.

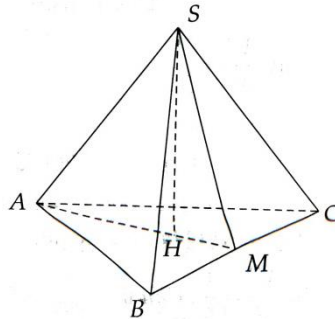
Phương pháp giải: Dùng các kiến thức nêu trong phần Tóm tắt lý thuyết và các kiến thức đã học để giải quyết các yêu cầu của bài toán.

Bài 1: Cho hình chóp đều S.ABC, có tất cả các cạnh bằng nhau và đều bằng 4 cm.

- a) Xác định vị trí chân đường cao H của hình chóp S.ABC và tính độ dài đoạn SH.
- b) Tính diện tích xung quanh hình chóp.

- c) Tính diện tích toàn phần của hình chóp.
- d) Tính thể tích hình chóp.

Hướng Dẫn:



- a) Chân đường cao H của hình chóp S.ABC trùng với trọng tâm của tam giác ABC.

Gọi M là trung điểm của BC

Tam giác ABC có

$$AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = 2\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ (cm)}$$

$$\Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{\frac{32}{3}} \text{ (cm)}$$

- b) Tam giác SAM cân ở M nên $SM = AM = 2\sqrt{3} \text{ (cm)}$

$$\text{Diện tích xung quanh của hình chóp: } S_{xq} = 12\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$$

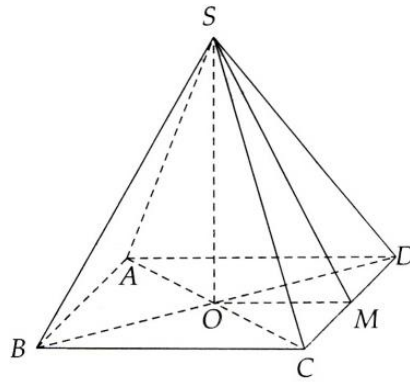
- c) Diện tích toàn phần của hình chóp: $S_{tp} = 16\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$

- d) Thể tích của hình chóp $V = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SH = \frac{16\sqrt{2}}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$

Bài 2: Cho hình chóp đều S.ABCD có cạnh bên bằng 5 dm, đường cao bằng 4 dm.

- a) Tính diện tích toàn phần hình chóp.
- b) Tính thể tích hình chóp.

Hướng Dẫn:



a) Gọi O là tâm của đáy ABCD và M là trung điểm của cạnh CD.

Ta tính được: $OD = 3(dm)$

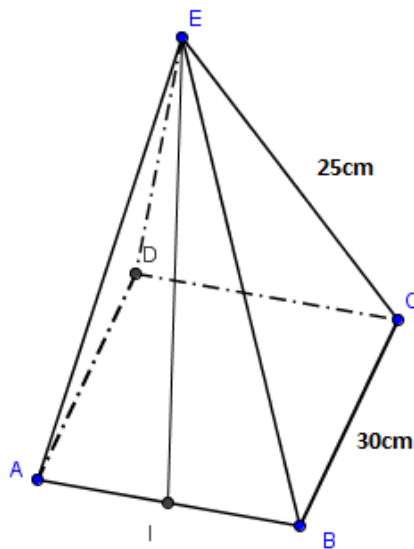
$$CD = 3\sqrt{2}(dm), SM = \sqrt{20,5}(dm)$$

Từ đó quy ra diện tích toàn phần của hình chóp là: $S_{tp} = 18 + 6\sqrt{41}(dm^2)$

b) Thể tích của hình chóp là: $V = 24(dm^3)$

Bài 3: Hình chóp tứ giác đều có độ dài cạnh bên bằng 25cm. Đáy là hình vuông ABCD cạnh 30cm. Tính diện tích toàn phần của hình chóp?

Hướng Dẫn:



Gọi EI là một trung đoạn của hình chóp đều, ta có

$$EI^2 + IB^2 = EB^2$$

$$\Rightarrow EI^2 = EB^2 - IB^2 = EB^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2$$

$$EI^2 = 25^2 - 15^2$$

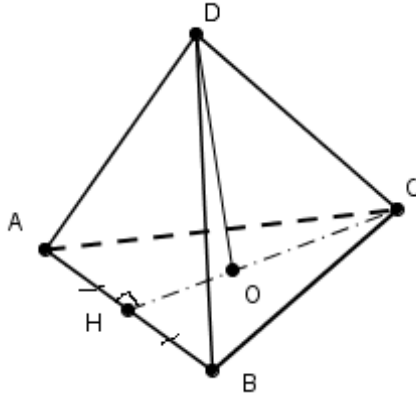
$$\Rightarrow EI = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20cm$$

Diện tích toàn phần của hình chóp đều

$$S_{tp} = S_{xq} + S_d = (30 + 30)20 + 30.30 = 2100cm^2$$

Bài 4: Tính thể tích hình chóp tam giác đều, biết đường cao 12cm, cạnh đáy 10cm.

Hướng Dẫn:



Hình chóp tam giác đều với cạnh đáy $AB = 10cm$, đường cao $OD = 12cm$ có

+ Đường cao của tam giác đáy $CH = \sqrt{10^2 - 5^2} \approx 8,66cm$

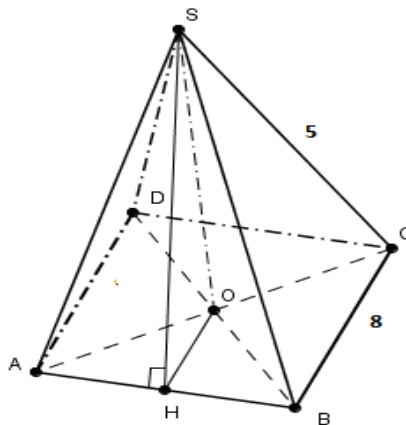
+ Diện tích đáy

$$S = \frac{1}{2} HC.AB = \frac{1}{2} 10.8,66 = 43,30cm^2$$

Thể tích $V = \frac{1}{3} S.OD = \frac{1}{3} .43,3.12 = 173,20cm^3$

Bài 5: Cho hình chóp tứ giác đều có độ dài cạnh đáy bằng 8cm và độ dài cạnh bên bằng 5cm. Tính diện tích toàn phần của hình chóp.

Hướng Dẫn:



Trong tam giác vuông SHB, theo pytago ta có $SH = \sqrt{SB^2 - HB^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$

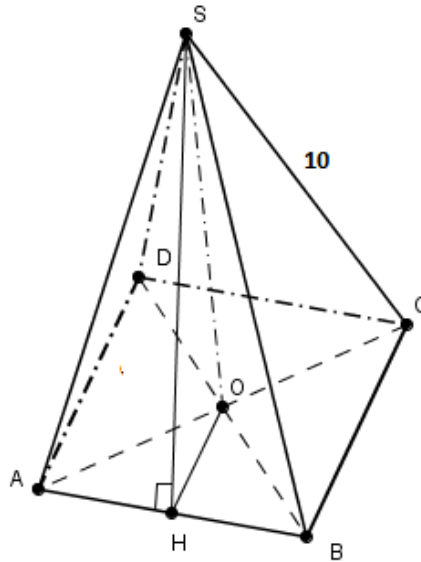
Diện tích đáy là $S_d = 8.8 = 64(cm^2)$

Diện tích xung quanh hình chóp là $S_{xq} = pd = (8 + 8).3 = 48(cm^2)$

Diện tích toàn phần hình chóp: $S_{tp} = S_{xq} + S_d = 64 + 48 = 112(cm^2)$

Bài 6: Tính diện tích toàn phần của hình chóp tứ giác đều S.ABCD biết $BD = 12\sqrt{2}cm, SC = 10cm$

Hướng Dẫn:



Hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông nên $AD = AB$

Ta có $BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = AB\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

$$\Rightarrow AB = 12$$

Trong tam giác vuông SHB, theo pytago ta có $SH = \sqrt{SB^2 - HB^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$

Trong tam giác SOB vuông tại O, theo pytago ta có

$$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{10^2 - (6\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{7}$$

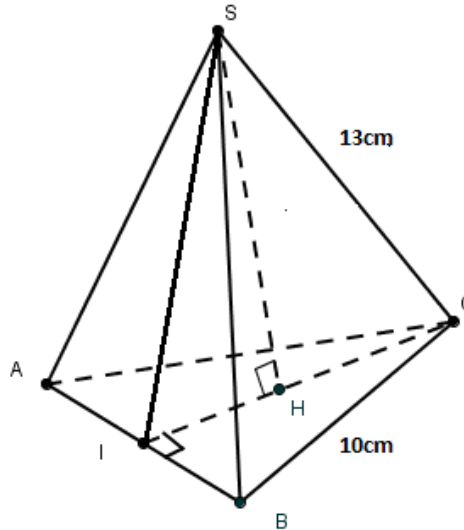
Diện tích đáy là $S_d = 12.12 = 144(cm^2)$

Diện tích xung quanh hình chóp là $S_{xq} = pd = (12 + 12).8 = 192(cm^2)$

Diện tích toàn phần hình chóp $S_{tp} = S_{xq} + S_d = 144 + 192 = 336(cm^2)$

Bài 7: Tính diện tích toàn phần của hình chóp tam giác đều biết cạnh đáy bằng 10cm, cạnh bên bằng 13cm.

Hướng Dẫn:



Tam giác BCA cân tại S có $SI \perp AB$ tại I, theo pytago ta có

$$SI = \sqrt{SB^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$$

Tam giác ABC là tam giác đều có cạnh là $a = 10\text{cm}$ nên chiều cao tam giác đều là

$$h = CI = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

S.ABC là hình chóp đều nên chân đường cao H trùng với giao điểm ba đường trung tuyến của tam giác, ta có $SH \perp CI$ và $HC = \frac{2}{3}CI = \frac{2}{3}.5\sqrt{3} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$

Trong tam giác SHC vuông tại H, theo định lí pytago ta có

$$HS = \sqrt{SC^2 - CH^2} = \sqrt{13^2 - \left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)^2} \approx 11,6$$

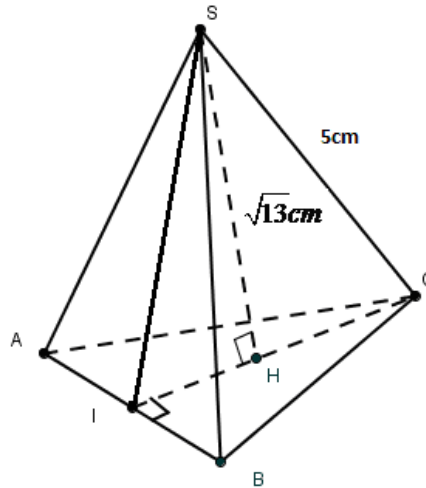
Diện tích đáy là $S = \frac{1}{2}CI.AB = \frac{1}{2}.5\sqrt{3}.10 = 25\sqrt{3}(cm^2)$

$$S_{xq} = pd = \left(\frac{10 + 10 + 10}{2}\right).12 = 180(cm^2)$$

Vậy diện tích toàn phần của hình chóp là $S_p = S_{xq} + S_d = 11,6 + 180 = 191,6(cm^2)$

Bài 8: Tính diện tích toàn phần của hình chóp tam giác đều biết chiều cao bằng $\sqrt{13}\text{cm}$ và cạnh bên bằng 5cm.

Hướng Dẫn:



S.ABC là hình chóp đều nên chân đường cao H trùng với giao điểm ba đường trung tuyến của tam giác, ta có $SH \perp CI$ và $HC = \frac{2}{3}CI$

Trong tam giác SHC vuông tại H, theo định lí pytago ta có

$$HC = \sqrt{SC^2 - SH^2} = \sqrt{5^2 - \sqrt{13}^2} = 2\sqrt{3}$$

Suy ra $CI = 3\sqrt{3}$ cm

Tam giác ABC là tam giác đều, giả sử có cạnh là a nên chiều cao tam giác

đều là $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ mà CI là chiều cao tam giác ABC nên cạnh tam giác đều là

$$\frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 6 \text{ hay } AB=6\text{cm}$$

Diện tích đáy là $S = \frac{1}{2}CI \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 6 = 9\sqrt{3}(\text{cm}^2)$

Ta có SI là trung đoạn của hình chóp, ta có $SI = \sqrt{SB^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

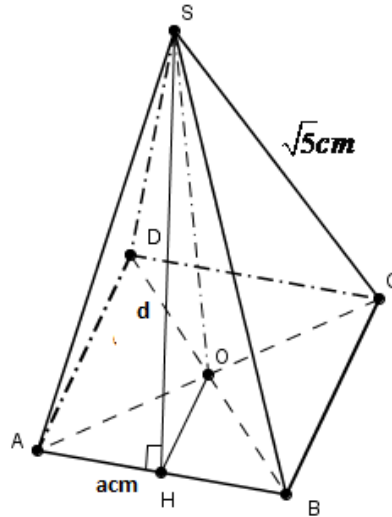
$$S_{xq} = pd = \left(\frac{6+6+6}{2}\right) \cdot 4 = 36(\text{cm}^2)$$

Vậy diện tích toàn phần của hình chóp là $S_{tp} = S_{xq} + S_d = 36 + 9\sqrt{3} \approx 51,6(\text{cm}^2)$

Bài 9 : Cho hình chóp tứ giác đều có diện tích xung quanh bằng $\frac{2}{3}$ diện tích toàn phần. Tính diện

tích xung quanh của hình chóp biết cạnh bên $\sqrt{5}\text{cm}$

Hướng Dẫn :



Gọi a là cạnh đáy của hình chóp tứ giác đều, d là trung đoạn.

Ta có $S_{xq} = \frac{2}{3}S_p$

Mà $S_{xq} = pd = 2a.d$ và $S_p = S_{xq} + S_d = 2ad + a^2$

Vậy $2ad = \frac{2}{3}(2ad + a^2)$

$$\Rightarrow 2ad = \frac{4ad}{3} + \frac{2a^2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}ad - \frac{2}{3}a^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}a(d - a) = 0$$

$$\Leftrightarrow d = a \text{ vì } a > 0$$

Ta có
$$d = \sqrt{SB^2 - HB^2} = \sqrt{5 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{20 - a^2}}{2}$$

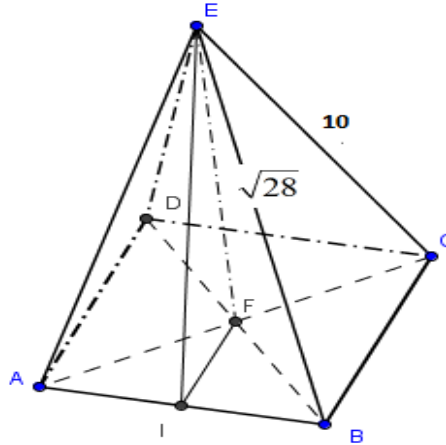
Vậy
$$\frac{\sqrt{20 - a^2}}{2} = a \Leftrightarrow 2a = \sqrt{20 - a^2} \Leftrightarrow 4a^2 = 20 - a^2$$

$$\Leftrightarrow 5a^2 = 20 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = 2$$

Diện tích xung quanh của hình chóp là $S_{xq} = pd = 2a.d = 2.2.2 = 8(\text{cm}^2)$

Bài 10: Tính diện tích toàn phần của hình chóp tứ giác đều biết chiều cao bằng $\sqrt{28}\text{cm}$ và cạnh bên bằng 10cm.

Hướng Dẫn:



Áp dụng định lí pytago trong tam giác vuông EFC ta có

$$CF = \sqrt{EC^2 - FE^2} = \sqrt{10^2 - \sqrt{28}^2}$$

$$FC = \sqrt{100 - 28} = \sqrt{72}cm$$

Suy ra $AC = 2\sqrt{72} cm$

Gọi a là độ dài cạnh đáy của hình chóp, ta có

$$AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2} = 2\sqrt{72}$$

$$\Rightarrow a = 12cm$$

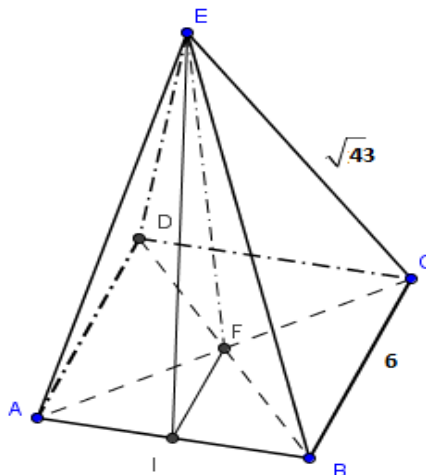
Diện tích tứ giác đáy $S = 12.12 = 144cm^2$

Thể tích hình chóp

$$V = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}144.\sqrt{28} \approx 253,9cm^3$$

Bài 11: Tính thể tích hình chóp tứ giác đều biết độ dài cạnh đáy bằng 6cm và độ dài cạnh bên bằng $\sqrt{43}cm$

Hướng Dẫn:



Ta có $AC = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}cm$

Suy ra $FC = 3\sqrt{2}cm$

Áp dụng định lí pytago trong tam giác vuông EFC

Ta có $EF = \sqrt{EC^2 - FC^2} = \sqrt{\sqrt{43}^2 - (3\sqrt{2})^2}$

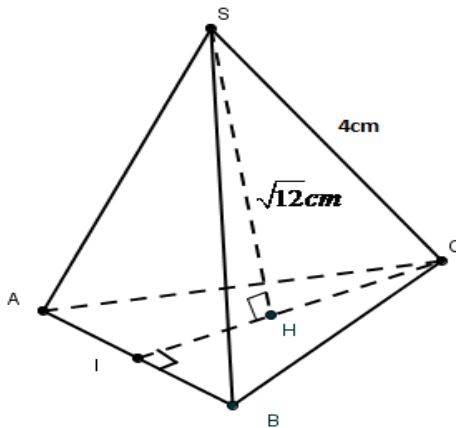
$EF = \sqrt{43 - 18} = \sqrt{25} = 5cm$

Diện tích tứ giác đáy $S = 6.6 = 36cm$

Thể tích hình chóp: $V = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}36.5 = 60cm^3$

Bài 12: Tính thể tích hình chóp tam giác đều biết chiều cao bằng $\sqrt{12}cm$ và cạnh bên bằng 4cm.

Hướng Dẫn:



S.ABC là hình chóp đều nên chân đường cao H trùng với giao điểm ba đường trung tuyến

của tam giác, ta có $SH \perp CI$ và $HC = \frac{2}{3}CI$

Trong tam giác SHC vuông tại H, theo định lí pytago ta có

$$HC = \sqrt{SC^2 - SH^2} = \sqrt{4^2 - \sqrt{12}^2} = 2$$

Suy ra $CI = 3cm$

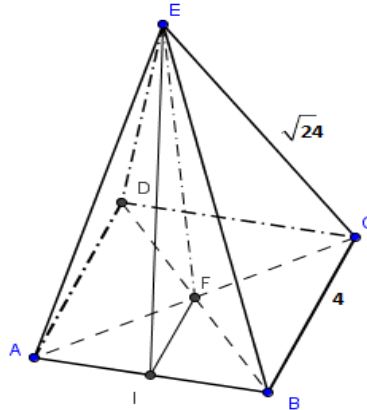
Tam giác ABC là tam giác đều, giả sử có cạnh là a nên chiều cao tam giác đều là $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ mà CI là chiều cao tam giác ABC nên cạnh tam giác đều là $\frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{2.3}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ hay $AB = 2\sqrt{3} cm$

Diện tích đáy là $S = \frac{1}{2}CI.AB = \frac{1}{2}.3.2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}(cm^2)$

Thể tích hình chóp là $V = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}3\sqrt{3}.\sqrt{12} = 6(cm^3)$

Bài 13: Tính thể tích hình chóp tứ giác đều biết độ dài cạnh đáy bằng 4cm và độ dài cạnh bên bằng $\sqrt{24}cm$

Hướng Dẫn:



E.ABCD là hình chóp tứ giác đều có đáy ABCD là hình vuông, có cạnh $AB=4cm$

Ta có $AC = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}cm$

Suy ra $FC = 2\sqrt{2}cm$

Áp dụng định lí pytago trong tam giác vuông EFC ta có

$$EF = \sqrt{EC^2 - FC^2} = \sqrt{\sqrt{24}^2 - (2\sqrt{2})^2}$$

$$EF = \sqrt{24 - 8} = \sqrt{16} = 4cm$$

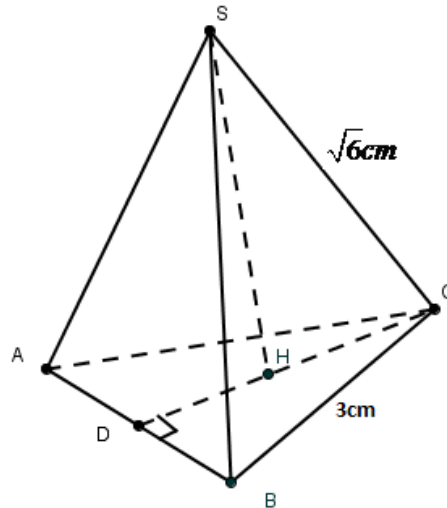
Chiều cao hình chóp là 4cm

Diện tích tứ giác đáy $S = 4.4 = 16cm$

Thể tích hình chóp: $V = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}16.4 \approx 21,3cm^3$

Bài 14: Tính thể tích hình chóp tam giác đều biết độ dài cạnh bên bằng $\sqrt{6}cm$ và cạnh bên đáy 3cm.

Hướng Dẫn:



Gọi H là trọng tâm tam giác ABC, HC cắt AB tại D, ta có $AD = DB = \frac{3}{2}$

Tam giác CDB vuông tại D, theo định lí pytago, ta có

$$DC = \sqrt{BC^2 - BD^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ và } HC = \frac{2}{3}CD = \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

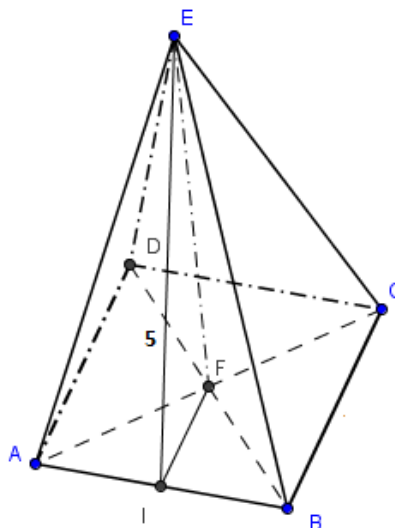
Tam giác SHC vuông tại H, ta có

$$SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = \sqrt{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{3}$$

Thể tích của hình chóp đều là $V = \frac{1}{3}S_d \cdot h = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} DC \cdot AB \right) \cdot SH = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 3 \right) \sqrt{3} = \frac{9}{4} \text{ cm}^3$

Bài 15: Tính thể tích hình chóp tứ giác đều có trung đoạn bằng 5cm và diện tích xung quanh bằng 80cm^2 .

Hướng Dẫn:



Diện tích xung quanh hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy là a cm, trung đoạn là 5cm:

$$S_{xq} = p.d = 2a.5 = 80cm^2$$

Hay $a = 8$ cm

$$\text{Ta có } AC = \sqrt{8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2}cm$$

$$\Rightarrow BF = 4\sqrt{2}cm$$

Ta có $FI = 4$ cm (vì FI là đường trung bình của tam giác ABC , tam giác ABC có cạnh $AB = a = 8$ cm)

Áp dụng định lí pytago trong tam giác vuông EFI

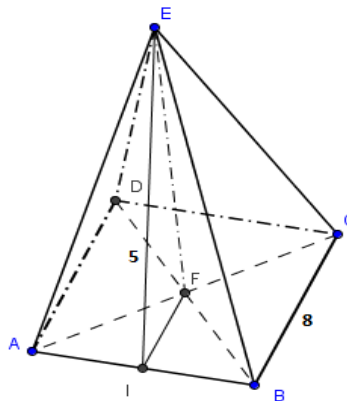
$$\text{Ta có } EF = \sqrt{EI^2 - FI^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3cm$$

Thể tích hình chóp

$$V = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}8^2.3 = 64cm^3$$

Bài 16: Tính thể tích hình chóp tứ giác đều có diện tích xung quanh bằng $80cm^2$ và diện tích toàn phần bằng $144cm^2$

Hướng Dẫn:



Diện tích xung quanh hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy là a , trung đoạn là d

$$S_{xq} = p.d = 2a.d = 80cm^2 \quad (1)$$

Diện tích toàn phần của hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy là a , trung đoạn là d

$$S_{xq} + S_d = 2ad + a^2 = 144cm^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $a^2 = 144 - 80 = 64 \Rightarrow a = \sqrt{64} = 8cm$

Thay $a = 8$ vào (1) ta được $d = 5$ cm

$$\text{Ta có } AC = \sqrt{8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2}cm$$

$$\Rightarrow BF = 4\sqrt{2}cm$$

Ta có $FI = 4\text{cm}$

Áp dụng định lí pytago trong tam giác vuông EFI

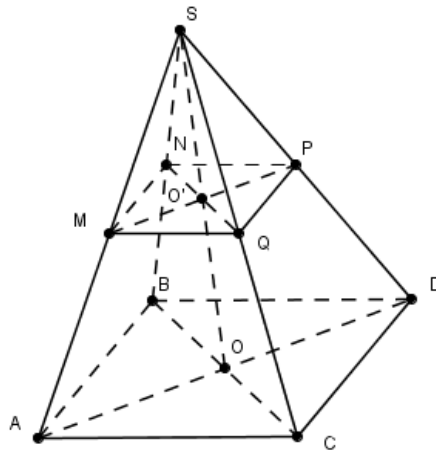
Ta có $EF = \sqrt{EI^2 - FI^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3\text{cm}$

Vậy thể tích của hình chóp tứ giác đều đã cho là

$$V = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}8^2.3 = 64\text{cm}^3$$

Bài 17: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng a . Gọi M, N, Q lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD . Tính thể tích của hình chóp cắt đều $ABCD.MNPQ$ theo a .

Hướng Dẫn:



Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh đều bằng a và N là trung điểm SB nên $NB = \frac{a}{2}$

Trong hình thang vuông $OO'NB$ vẽ đường cao NI ,

$$\text{Ta có } OB = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + AC^2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + a^2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$O'N = \frac{ON}{2} = \frac{\sqrt{MN^2 + MQ^2}}{2}$$

$$O'N = \frac{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{2} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

$$IB = OB - O'N = \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{a\sqrt{2}}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

$$NI = \sqrt{NB^2 - IB^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2}$$

$$\Rightarrow NI = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{2a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

Vậy đường cao của hình chóp cắt là $\frac{a\sqrt{2}}{4}$

Diện tích đáy lớn $S_1 = a^2 (cm^2)$

Diện tích đáy nhỏ $S_2 = \frac{a^2}{4} (cm^2)$

Thể tích hình chóp cắt là

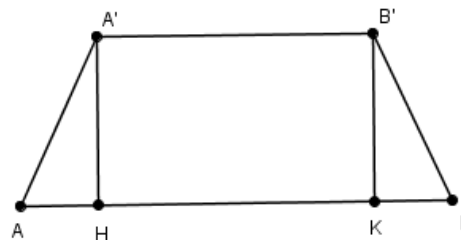
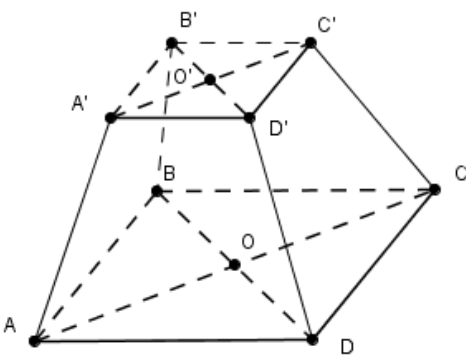
$$V = \frac{1}{3} \cdot h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4} \left(a^2 + \frac{a^2}{4} + \sqrt{a^2 \cdot \frac{a^2}{4}} \right)$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{a^2\sqrt{7}}{2} = \frac{a^3\sqrt{14}}{24} (cm^3)$$

Bài 18: Một hình chóp cắt đều ABCD.A'B'C'D' có các cạnh đáy bằng a và 2a, đường cao của mặt bên bằng a.

- a) Tính diện tích xung quanh
- b) Tính cạnh bên, đường cao của hình chóp cắt đều.

Hướng Dẫn:



a) Diện tích xung quanh của hình chóp cắt đều

$$S_{xq} = \frac{1}{2}(p + p') \cdot d = \frac{1}{2}(4 \cdot 2a + 4a) \cdot a = 6a^2$$

b) Khai triển hình chóp cắt đều ta thấy mặt bên là hình thang cân ABA'B'. Vẽ đường cao A'H và B'K, ta có

$$AH = BK = \frac{AB - A'B'}{2} = \frac{a}{2}$$

Trong hình thang vuông $OBB'O'$ vẽ đường cao $B'I$ ta có

$$OB = \frac{BD}{2} = a\sqrt{2}; O'B' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$BI = OB - O'B' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Vậy đường cao hình chóp cụt đều là

$$B'I = \sqrt{B'B^2 - BI^2}$$

$$B'I = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Dạng 2. Các bài toán cơ bản về mối quan hệ giữa hình lập phương, hình hộp chữ nhật với hình chóp đều và các bài toán thực tế.

Phương pháp giải: Vẽ hình, nhận dạng hình chóp đều cùng các dữ kiện và tính các yêu cầu bài toán.

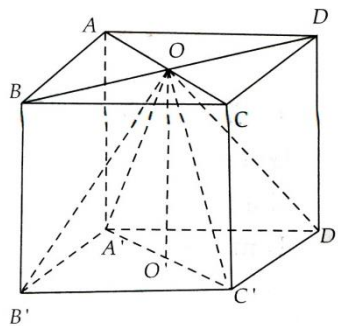
Bài 1: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi O là tâm của mặt đáy $ABCD$.

a) Chứng minh $O.A'B'C'D'$ là hình chóp tứ giác đều.

b) Gọi thể tích hình chóp đều $O.A'B'C'D'$ là V' và thể tích hình lập phương là V . Tính tỉ số

$$\frac{V'}{V}$$

Hướng Dẫn:



a) Bốn tam giác OAA' , OBB' , OCC' , ODD' là các tam giác vuông bằng nhau

Nên suy ra $OA' = OB' = OC' = OD'$.

Hình chóp $O.A'B'C'D'$ là h/chóp đều vì có các mặt bên là tam giác cân và đáy là đa giác đều.

b) Thể tích của của hình chóp $O.A'B'C'D'$ là: $V' = \frac{1}{3}a^3 (cm^3)$

Thể tích hình lập phương: $V = a^3 (cm^3)$

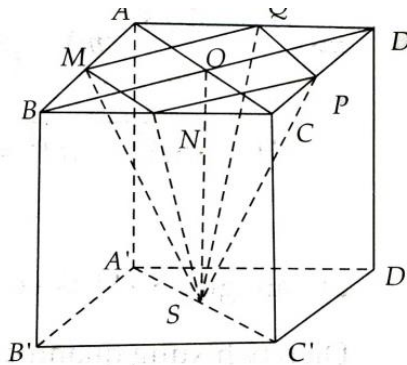
$$\text{Vậy } \frac{V'}{V} = \frac{1}{3}$$

Bài 2.: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Gọi S là tâm A'B'C'D'. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA.

a) Chứng minh S.MNPQ là hình chóp tứ giác đều.

b) Gọi thể tích hình chóp S.MNPQ là V' và thể tích hình lập phương là V. Tính tỉ số $\frac{V'}{V}$.

Hướng Dẫn:



a) Hình chóp S.MNPQ là hình chóp đều vì các mặt bên là tam giác cân và đáy MNPQ là đa giác đều.

b) $\frac{V'}{V} = \frac{1}{6}$. Chú ý $S_{ABCD} = 2S_{MNPQ}$

Bài 3.: Trong đợt kỉ niệm ngày thành lập đoàn TNCS Hồ Chí Minh, nhà trường tổ chức cắm trại cho khối lớp 8. Lớp 8A dự định dựng một trại có dạng hình chóp đều S.ABCD với bốn cạnh sử dụng bốn cọc tre cùng đặt nghiêng so với mặt đất một góc cố định và một cọc tre trụ chính giữa trại cao 2,5 m. Biết thời gian để một học sinh đi dọc theo một cạnh của trại với vận tốc 0,5 m/s là 6s.

a) Tính diện tích vải bạt dùng để phủ kín xung quanh trại.

b) Tính thể tích của trại.

Hướng Dẫn:

Trại có dạng hình chóp tứ giác đều S.ABCD (như hình vẽ)

a) Độ dài cạnh của trại là: $CD = 3(m)$. Gọi O là tâm của đáy và M là trung điểm của cạnh đáy CD.

Ta có: $SM^2 = SO^2 + OM^2$. Từ đó tính được $SM = \frac{\sqrt{34}}{2}(m)$

Từ đó quy ra diện tích vải bạt cần phủ: $S_{xq} = 3\sqrt{34} (m^2)$

b) Thể tích của trại là: $V = 7,5 (m^3)$

Bài 4: Kim tự tháp Louver được xây dựng ngay lối vào của bảo tàng Louvre tại thủ đô Paris nước Pháp. Kim tự tháp có dạng hình chóp đều $S.ABCD$ với chiều cao và chiều dài cạnh bên của kim tự tháp lần lượt là 21m và 34m. Tính thể tích của kim tự tháp.

Hướng Dẫn:

Độ dài cạnh đáy của kim tự tháp là: $\sqrt{1430} (m^3)$

Thể tích của kim tự tháp là: 10010 (m^3)

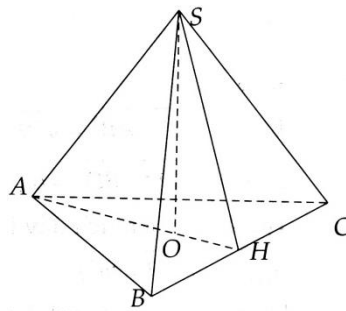
III. Bài tập tự luyện

Bài 1: Cho hình chóp đều $S.ABC$ đường cao $SO = 7$ cm đường cao trong tam giác ABC bằng 3 cm.

a) Tính diện tích toàn phần hình chóp.

b) Tính thể tích hình chóp.

Hướng Dẫn:



a) Gọi H là trung điểm của BC

Trung đoạn $SH = \sqrt{OH^2 + SO^2} = 5\sqrt{2} (cm)$

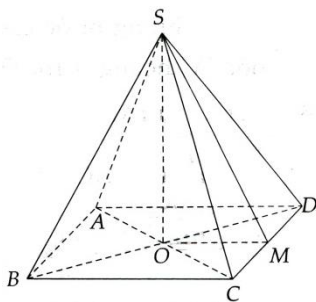
Tam giác AHC có $AC^2 = AH^2 + \left(\frac{AC}{2}\right)^2$. Từ đó tìm được $AC = 2\sqrt{3} (cm)$

Diện tích xung quanh của hình chóp là: $S_{tp} = 15\sqrt{6} + 3\sqrt{3} (cm^2)$

b) Thể tích của hình chóp $V = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} \cdot SO = 7\sqrt{3} (cm^3)$

Bài 2:. Kim tự tháp Kê-ôp (Kheops) ở Ai Cập có hình dạng là một hình chóp tứ giác đều. Biết chiều cao kim tự tháp là 137m, cạnh đáy dài 231m. Tính diện tích xung quanh và thể tích của kim tự tháp.

Hướng Dẫn:



Kim tự tháp có dạng hình chóp tứ giác đều S.ABCD.

Gọi M là trung điểm của cạnh CD; O là tâm của đáy ABCD.

Tính được: $SM = \frac{\sqrt{124437}}{2} (m)$

Diện tích xung quanh của kim tự tháp là:

$$S_{xq} = 231\sqrt{124437} (m^2)$$

Thể tích của kim tự tháp:

$$V = 2436819 (m^3)$$

Bài 3: Một hôm, bạn An đánh rơi một mô hình kim tự tháp có dạng là hình chóp tứ giác đều vào một hộp đựng đầy nước dạng hình hộp chữ nhật. Biết hình hộp chữ nhật có kích thước đáy là 7x5 cm và chiều cao là 10 cm; còn hình chóp đều có chiều cao là 5 cm và cạnh đáy dài 6 cm. Hỏi khi vớt mô hình ra, lượng nước còn lại trong hộp là bao nhiêu?

Hướng Dẫn:

Thể tích lượng nước còn lại trong hộp bằng hiệu giữa thể tích của hình hộp chữ nhật và thể tích của hình chóp đều. Vậy thể tích lượng còn lại là: 290 (cm³).

ÔN TẬP CHUYÊN ĐỀ 4

I. Lí Thuyết

Xem phần *Tóm tắt lý thuyết* từ Bài 1 đến Bài 6.

II. Các dạng bài tập

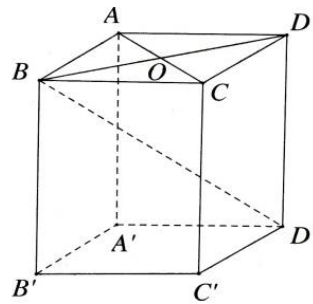
Dạng 1. Các bài toán về diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của

Phương pháp giải: Sử dụng các công thức tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, thể tích của hình hộp, hình chóp, hình lăng trụ, ... để tính.

Bài 1: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có $BD' = 10cm, AB = 5cm, AC = 8 cm$. Hãy tính:

- Diện tích toàn phần hình hộp;
- Lượng nước cần để đổ đầy hộp

Hướng Dẫn:



a. Ta có $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{39} \text{ (cm)}$

$$DD' = \sqrt{BD'^2 - BD^2} = 6 \text{ (cm)}$$

Tìm được diện tích đáy là: $S_{ABCD} = 5\sqrt{39} \text{ (cm}^2\text{)}$

Diện tích xung quanh hình hộp là:

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{ABCD} = 60 + 22\sqrt{39} \text{ (cm}^2\text{)}$$

b) Tính được thể tích hình hộp là:

$$V = 30\sqrt{39} \approx 187,35 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Từ đó lượng nước cần để đổ đầy hộp là khoảng 0,18735l.

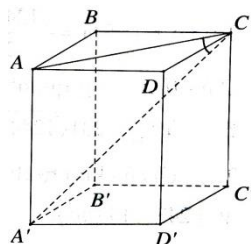
Bài 2: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, chiều cao $AA' = a$ và

$A'CA = 45^\circ$. Hãy tính:

a) Diện tích toàn phần hình hộp theo a ;

b) Thể tích hình hộp theo a .

Hướng Dẫn:



a) Tìm được $AC = a; AB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

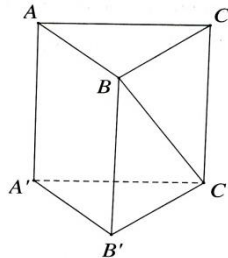
Từ đó tính được $S_{tp} = (1 + 2\sqrt{2})a^2$

b) Thể tích hình hộp là: $V = \frac{a^3}{2}$

Bài 3: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB = 3\text{ cm}$, $AC = 4\text{ cm}$, $BC' = 13\text{ cm}$. Hãy tính:

- a) Diện tích xung quanh lăng trụ;
- b) Thể tích hình lăng trụ.

Hướng Dẫn:



a) Sử dụng định lý Pitago ta có:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 \Rightarrow BC = 5\text{ (cm)}$$

$$BC'^2 = BC^2 + CC'^2 \Rightarrow CC' = 12\text{ (cm)}$$

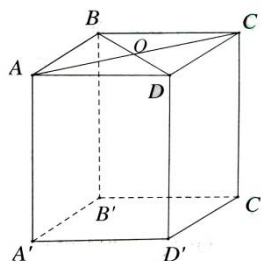
Từ đó tìm được diện tích xung quanh $S_{xq} = 144\text{ (cm}^2\text{)}$

b) Thể tích hình lăng trụ là: $V = CC' \cdot S_{\Delta ABC} = 72\text{ (cm}^3\text{)}$

Bài 4: Cho hình lăng trụ đứng có đáy là hình thoi với các đường chéo có độ dài bằng 10 cm và 24 cm , chiều cao lăng trụ bằng 20 cm . Hãy tính:

- a) Diện tích toàn phần hình lăng trụ;
- b) Thể tích hình lăng trụ.

Hướng Dẫn:



a) Tính được $BC = 13\text{ cm}$.

Diện tích xung quanh lăng trụ là: $S_{xq} = 1040\text{ (cm}^2\text{)}$

Vậy diện tích toàn phần lăng trụ: $S_{tp} = 1280\text{ (cm}^2\text{)}$

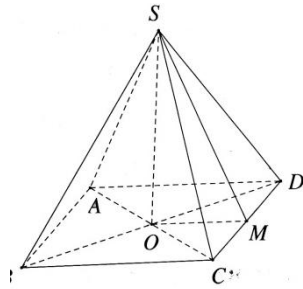
b) Thể tích hình lăng trụ là: $V = 2400\text{ (cm}^3\text{)}$

Bài 5: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đường cao bằng 12 cm và trung đoạn bằng 13 cm . Hãy tính:

- a) Độ dài cạnh đáy hình chóp;
- b) Diện tích xung quanh hình chóp;

c) Thể tích hình chóp.

Hướng Dẫn:



a) Gọi M là trung điểm CD và O là tâm đáy ABCD.

Sử dụng định lí Pitago, có $OM = \sqrt{SM^2 - SO^2} = 5 (cm)$

Suy ra: $AD = 10 (cm)$

b) Diện tích xung quanh hình chóp là: $S_{xq} = 260 (cm^2)$

c) Thể tích hình chóp là: $V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot h = 400 (cm^3)$

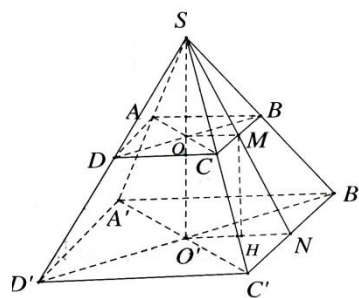
Bài 6: Cho hình chóp cụt đều $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, B'C. Cho biết $AB = 4 cm$, $A'B' = 8 cm$ và $MN = 4 cm$.

a) Tính diện tích toàn phần hình chóp cụt.

b) Tính chiều cao hình chóp cụt.

c) Lắp một hình chóp đều có độ dài đáy bằng đúng độ dài đáy nhỏ hình chóp cụt. Cho biết cạnh bên hình chóp đều bằng $2\sqrt{5}cm$, hãy tính thể tích của hình chóp đều mới sau khi lắp ghép.

Hướng Dẫn:



a) Tính diện tích xung quanh $S_{xq} = 4 \cdot S_{BCB'C'} = 96 (cm^2)$

Vậy diện tích toàn phần là: $S_{tp} = 176 (cm^2)$.

b) Gọi O, O' là tâm đáy ABCD và A'B'C'D'.

Hạ $MH \perp O'N (H \in O'N)$

Tìm được: $OO' = MH = 2\sqrt{3} (cm)$

c) Gọi hình chóp thêm vào là S.ABCD (hình vẽ)

Tính được $SO' = 4\sqrt{3}$ (cm)

Vậy thể tích hình chóp mới $SA'B'C'D'$ là:

$$V_{SA'B'C'D'} = \frac{256\sqrt{3}}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$$

Dạng 2. Các bài toán thực tế liên quan đến các khối hình

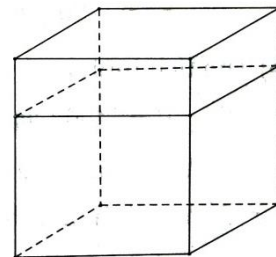
Phương pháp giải: Nhận dạng, vẽ hình và tính các yêu cầu bài toán dựa vào các khối hình cơ bản đã biết.

Bài 1: Một thầy giáo miền núi có ý tưởng xây dựng bể bơi di động dạng hình hộp chữ nhật cho các học sinh nghèo tiểu học bằng cách xây dựng một khung bằng sắt có chiều dài đáy là 10m, diện tích đáy 50 m^2 , chiều cao khung sắt là 1m. Sau đó phủ kín xung quanh và đáy bằng bạt dày.

a) Tính diện tích bạt cần dùng để làm bể bơi di động.

b) Mỗi lần cho học sinh tập bơi, cần phải đổ lượng nước vào sao cho cách mép trên bể bơi di động 30cm, biết số tiền cho 1 m^3 nước là 5000 đồng. Hỏi thầy giáo cần bỏ ra bao nhiêu tiền để trả cho mỗi lần.

Hướng Dẫn:



a) Ta có chiều rộng của đáy là 5m. Diện tích xung quanh của bể bơi là: $S_{xq} = 30 \text{ (m}^2\text{)}$

Vậy diện tích bạt cần dùng là:

$$S = S_{xq} + 50 = 80 \text{ (m}^2\text{)}$$

b) Thể tích nước chứa trong bể bơi là:

$$V = 0,7.50 = 35 \text{ (m}^3\text{)}$$

Suy ra số tiền cần chi trả là: $T = 175000$ (đồng)

Bài 2: Một lều trại có dạng hình lăng trụ đứng đặt nằm ngang. Đáy của hình lăng trụ (tức hai đầu hồi của lều) có hình dạng là các tam giác cân, cạnh đáy của các tam giác cân này tiếp giáp mặt đất và có độ dài 3 m, chiều cao tương ứng dài 2m. Chiều cao lăng trụ (tức chiều dài của lều trại) bằng 4m.

a) Tính diện tích bạt phủ hai mái lều.

b) Tính thể tích của lều trại.

Hướng Dẫn:

- a) Tính được diện tích bạt phủ 2 mái lều: $20 \text{ (m}^2\text{)}$
- b) Thể tích của leeuud trại là: $V = 12 \text{ (m}^3\text{)}$

III. Bài tập tự luyện

Bài 1: Một hình lập phương có cạnh bằng 6 cm được tạo bởi 216 hình lập phương nhỏ cạnh 1 cm . Người ta sơn tất cả 6 mặt của hình lập phương lớn. Tính số lượng các hình lập phương cạnh 1 cm mà:

- a) Được sơn đúng ba mặt;
- b) Được sơn đúng hai mặt;
- c) Được sơn đúng một mặt.

Hướng Dẫn:

- a) 8 hình b) 48 hình c) 96 hình

Bài 2: Lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều, M là trung điểm BC, biết $AA' = AM = 2 \text{ cm}$.

- a) Tính diện tích xung quanh lăng trụ.
- b) Tính thể tích lăng trụ.

Hướng Dẫn:

- a) Tính được $AB = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ (cm)}$

Từ đó tìm được diện tích xung quanh lăng trụ:

$$S_{xq} = 8\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$$

- b) Tính được $S_{\Delta ABC} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ (cm}^2\text{)}$

Vậy thể tích lăng trụ là: $V = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$

Bài 3: Cho hình chóp lục giác đều có cạnh đáy bằng 2 cm , cạnh bên bằng 4 cm .

- a) Tính diện tích xung quanh hình chóp.
- b) Tính thể tích hình chóp.

Hướng Dẫn:

- a) Gọi M là trung điểm EF. Ta tính được: $SM = \sqrt{15} \text{ (cm)}$

Suy ra diện tích xung quanh hình chóp: $S_{xq} = 6\sqrt{15} \text{ (cm}^2\text{)}$

- b) ta có: $OE = 2 \text{ (cm)}$ và tính được $SO = 2\sqrt{3} \text{ (cm)}$

Tìm được diện tích đáy: $S_{ABCDEF} = 6 \cdot S_{\Delta OFE} = 6\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$

Từ đó tìm được thể tích hình chóp: $V = 12 \text{ (cm}^3\text{)}$.